بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۱)

سال دوم آموزش متوسطه

رشته‌های علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی**

نام کتاب : **هندسه (۱) ـ ۲۳۳/۲**

مؤلفان : **زهرا گویا، سهیلا غلام‌آزاد، جعفر نیوشا، بیژن ظهوری زنگنه، جواد حاجی بابائی و روح‌الله جهانی‌پور**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتاب‌های درسی**

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت: www.chap.sch.ir

رسام کامپیوتری : **هدیه بندار**

صفحه‌آرا : **طرفه سهائی**

طراح جلد : **علیرضا رضائی‌کُر**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

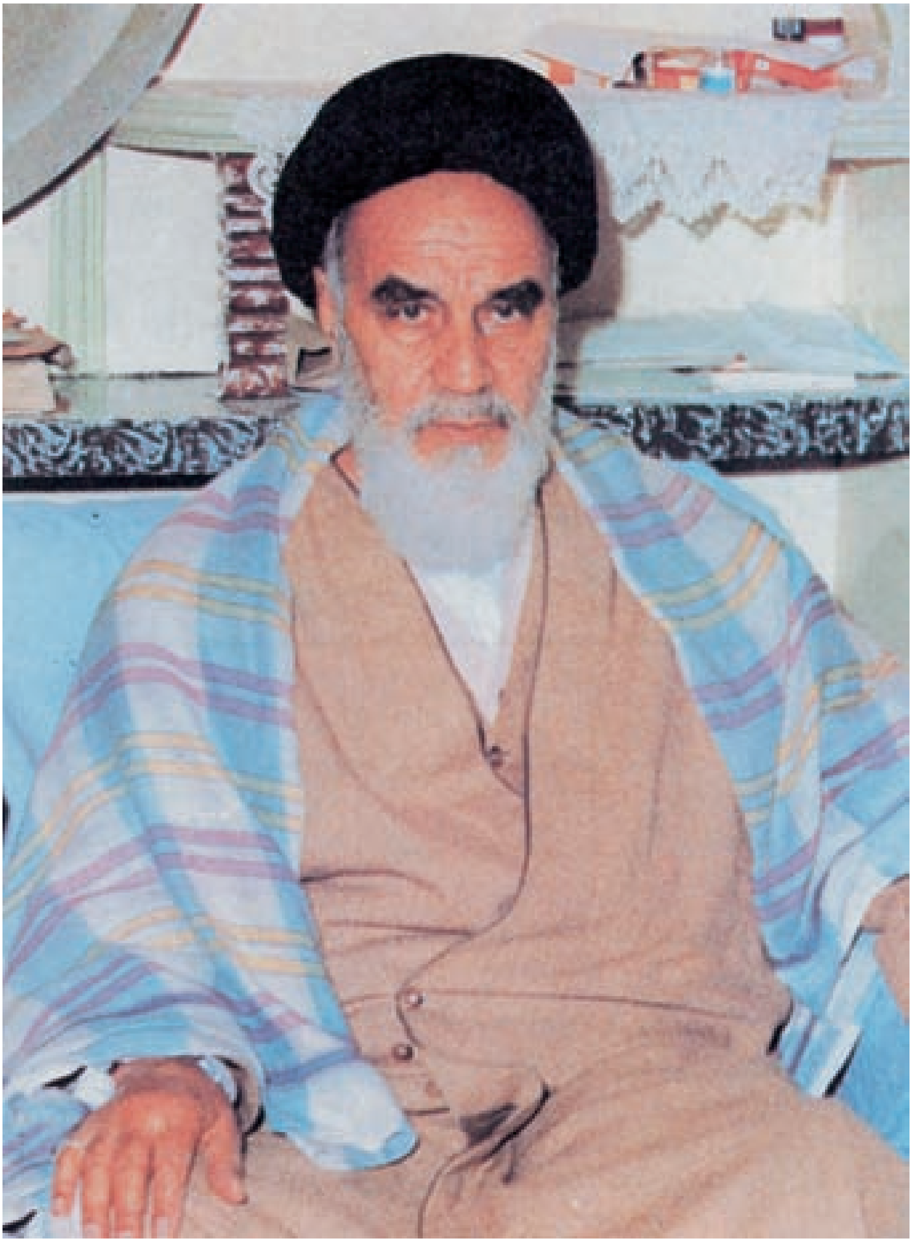
تلفن : ۵ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ هجدهم ۱۳۹۱**

ISBN 964-05-0589-7 شابک ۷-۰۵۸۹-۰۵-۹۶۴

۱۳۹۱



باید شما (معلمان) اینها (دانش‌آموزان) را از آن طبیعت منحطی که انسان را به انحطاط می‌کشد، آن حب جاه و حب مال و حب منصب احتراز دهید. اینها را از آن چیزهایی که خارِ راهِ انسان هستند، مانع ترقی انسان هستند احتراز بدهید... شما باید به اینها بفهمانید که زندگی شرافتمندانه، زندگی است.

پیشگفتار

به نام خداوند لوح و قلم — حقیقت‌نگار وجود و عدم
خدایی که داننده‌ی رازهاست — نخستین سرآغاز آغازهاست

این کتاب عظیم هستی برای همیشه در جلوی چشم‌های ما گشوده شده است و زبانی دارد، امّا بدون دانستن آن، فهم حتّی یک واژه‌ی هستی غیر ممکن می‌نماید. آن زبان، ریاضی است!

گالیله

ریاضی تنها به عنوان یک موضوع درسیِ دارای اهداف محدود، مطرح نیست. بسیاری از محقّقان بر این‌باورند که ریاضی، جریان طبیعی تفکّر بشری و به قول گالیله، زبان فهمیدن هستی است. از همان زمانی که کودک با شعف الگوی ساده‌ای را در حین بازی تشخیص می‌دهد و بعد از مشاهده‌ی اشیاء در مورد چگونگی عملکرد آن‌ها حدس‌هایی می‌زند، در واقع به شیوه‌ای طبیعی به نخستین تجربه‌های خود از درک ریاضی دست می‌یابد. در ادامه‌ی کسب این تجربه‌ها، هندسه به عنوان ابزاری برای درک وتوصیفِ فضایی که در آن قرار گرفته‌ایم، شاید شهودی‌ترین، ملموس‌ترین و واقعی‌ترین قسمت ریاضی باشد، و این تنها یک جلوه از هندسه است. بواقع، «به دلیل جنبه‌های چندگانه‌ی هندسه، ریاضیدان‌ها و آموزشگران ریاضی، به اتّفاق آرا، شروعِ آموزش هندسه از سال‌های کودکی و ادامه‌ی آن را به شکلی متناسب، در تمام طولِ برنامه‌ی درسیِ ریاضی ضروری می‌دانند» (دورنمای هندسه برای قرن بیست و یکم، ۱۹۹۴). در یک جمع‌بندی کلّی می‌توان گفت :

ــ هندسه علم شناخت دنیایی است که در آن زندگی می‌کنیم ؛

ــ هندسه روش نمایش مفاهیم و فرآیندهای شاخه‌ی مختلف ریاضی و علوم است ؛
ــ هندسه نقطه‌ی تلاقی بین ریاضی به عنوان یک علم مجرد و ریاضی به عنوان یک علم‌تجربی، شهودی است ؛
ــ هندسه مدل‌سازِ پدیده‌های طبیعی است ؛
ــ هندسه تمثیلی برای یاددادن و یادگرفتنِ استدلال استنتاجی است ؛
ــ هندسه وسیله‌ای مؤثر و مفید در ارائه کاربردهای بدیع و خلاق است.

بنابراین با توجّه به وسعت هندسه و توانایی‌هایی که می‌تواند در افراد ایجاد کند، یادگیری آن به‌عنوان یکی از قسمت‌های اصلی ریاضی اهمیّت بسیاری پیدا کرده است. به‌گفته ژان دیو دونه (۱۹۸۰)، امروزه «هندسه با بیرون آمدن از حصار تنگ و سنّتی خود، قدرت‌های پنهان و تنوّع و قابلیت سازگاری و انعطاف‌پذیری خارق‌العاده خود را آشکار کرده است، و کم‌کم به‌صورت یکی از پُراستفاده‌ترین و جهانی‌ترین ابزارها در تمام قسمت‌های ریاضی درمی‌آید.»

از ویژگی‌های دنیای کنونی و جامعه‌ی خودمان، رشد بی‌سابقه‌ی جمعیّت و «افزایش سریع تعداد دانش‌آموزان دوره‌ی آموزش متوسطه است. درنتیجه، تکیه بر روش سنّتی تدریس هندسه یعنی تنها به‌صورت انتزاعی به یک اقلیّت انتخاب شده (بخشی از دانش‌آموزان ریاضی) در پاسخ به انتظارهای اکثریّت دانش‌آموزانِ نسل‌های جدید، روز به روز مشکل‌تر و نامتناسب‌تر به نظر می‌رسد ». **تمام** دانش‌آموزان برای کسب توانایی و آمادگی لازم جهت ورود به عصر اطلاعات، باید به قابلیّت‌های خود در انجام ریاضی اعتماد پیدا کنند و توانایی حل مسأله و استدلال کردن را به‌دست آورند. برای رسیدن به چنین سطحی، آنان باید از طریق کتاب‌های درسیِ ریاضی، در معرض تجربه‌های متنوع و مرتبطِ یادگیری قرار گیرند تا با توسعه‌ی عادات ریاضی در خود، قادر به درک و قدردانی از نقش تعیین‌کننده‌ی ریاضی در مناسبت‌های انسانی باشند. همچنین، برای‌ریاضی به دلیل کارایی، زیبایی و انسجام درونی آن، ارزش قائل شوند و با علاقه در یادگیری آن کوشش نمایند. این اهداف، به شرطی تحقّق می‌یابند که دانش آموزان به کشف روابط ریاضی تشویق شوند. در طیّ این فرآیند، باید به آن‌ها فرصت داده شود تا اشتباه کرده و اشتباهات خود را تصحیح نمایند، حدسیّه‌سازی کنند و آن‌ها را به آزمایش بگذارند، سپس به استدلال در زمینه‌ی اعتبار آن‌ها بپردازند تا در نهایت، به قابلیت‌های خویش در حل مسائل پیچیده اعتماد پیدا کنند.

در همین راستا، توجّه اساسی مؤلفان در تدوین کتاب هندسه، ایجاد فرصت‌های یادگیری برای تمام دانش‌آموزان به منظور تحقّق مرحله‌ایِ هدف‌های ذکرشده بوده است. به اعتقاد ما، باید این توانایی‌ها پرورش یابند و جزء زندگی عادی دانش‌آموزان قرار گیرند تا آن‌ها بتوانند با کشف، حدسیّه‌سازی، استدلال منطقی و استفاده از روش‌های گوناگون، به حل مسائلِ از قبل پیش‌بینی‌نشده و غیربدیهی امّا واقعیِ خود بپردازند. در حقیقت، «در تدریس [ریاضی]، نه تنها قابل قبول بلکه

مطلقاً ضروری است که در شروع، کمتر انتزاعی بوده و مرتّب به کاربردها بپردازیم، و فقط زمانی به‌طور تدریجی به پالایش ایده‌ها و تجرید برسیم که دانش‌آموز برای درک آن‌ها توانمند شده باشد».
ما نیز در تألیف این کتاب تلاش کرده‌ایم از شهود شروع کرده و به تدریج به سمت تجرید برویم. همچنین، سعی بر این بوده است تا جایی که برنامه‌ی این درس اجازه می‌دهد، فرصت‌های مناسبی برای دانش‌آموزان ایجاد کنیم تا آن‌ها به الگوسازی از پدیده‌هایی که روزانه با آن‌ها روبرو می‌شوند، بپردازند ؛ چرا که بواقع، توانایی ما در تشخیص، تفسیر و خَلقِ الگوها، کلید فهمیدن دنیای اطرافمان است. به همین دلیل، در تمام کتاب، هدف این بوده است که مستقیم و غیرمستقیم ؛ به دانش‌آموزان بگوییم، «انجام دهید ؛ بسازید ؛ توجّه کنید ؛ منظّم کنید ؛ و فقط آن موقع است که به استدلال [دقیق] می‌پردازید». (ویلیام سایر، ۱۹۵۹)

همچنین، یکی دیگر از راهنماهای ما در تألیف این کتاب، بیانیه‌ی امضا شده توسط هفتادو پنج تن از مشهورترین ریاضیدان‌های دنیا در سال ۱۹۶۲بوده است که در آن تأکید شده : «معرّفی مفاهیمِ جدید بدون داشتن زمینه‌ی قبلیِ کافی در خصوص حقیقت‌های ملموس، معرّفی مفاهیم مجرد در زمانی که هنوز تجربه‌ای از تجرید وجود ندارد، یا عجله در معرّفی مفاهیم بدون کاربردهای ملموسی که می‌توانند دانش‌آموزان را به تحرّک فکری و فعّالیت وادارند، در واقع صورت‌گرائیِ ناپخته و بی‌استفاده‌ای است که ممکن است به عقیم کردن یادگیری ریاضی منتهی شود. معرّفی خام و زودرس انتزاع، به‌خصوص با مقاومتِ ذهن‌های نقّاد و کنجکاو روبرو می‌شود، ذهن‌هایی که قبل از پذیرش انتزاع، آرزو دارند بدانند که این تجرید بر چه اساسی منطبق است و چگونه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.» به همین دلیل و به خاطر احتراز از تجرید زودرس و ایجاد علاقه و انگیزه در تمام دانش‌آموزان، در مواقع مناسب، از آوردن بعضی استدلال‌های دقیق ریاضی اجتناب کرده یا وارد جزئیات اثبات، نشده‌ایم. به‌علاوه، در نگارش کتاب، همه جا با فرضِ آشنایی دانش‌آموز با مفاهیم ارائه شده در کتاب‌های دوره‌ی راهنمایی تحصیلی، مطالب مزبور جهت یادآوری و توسعه‌ی مطالب بعدی مورد استفاده قرار گرفته و در فصل اوّل از اثبات مجدد قضایا خودداری شده است.

از همکاران عزیز استدعا داریم که امکان انجام فعّالیت‌ها در کلاس در قالب **گروه‌های کوچک** را فراهم آورند تا روح مشارکت و همکاری در آن‌ها تقویت شود. ممکن است در ابتدای کار، این روند، به دلیل کم رنگ بودن زمینه‌ی مشارکت در کلاس‌های درس، از نظر زمانی وقت‌گیر باشد. امّا تحقیقات متعدّد نشان می‌دهند که با در پیش‌گرفتن این روند، در زمانی نه چندان طولانی، روحیه‌ی کار گروهی در کلاس ایجاد شده و پس از آن، زمانِ به ظاهر از دست رفته را می‌توان به‌سرعت جبران کرد. به علاوه، با انجام چنین فعّالیت‌هایی، دانش‌آموزان به اندازه‌ی کافی

برای انجام مسائل پایانِ هر بخش توانمند شده و حل آن‌ها وقت کمتری را به خود اختصاص خواهد داد. همچنین ذکر این نکته ضروری است که ارزشیابی می‌باید به‌طور مستمر صورت گرفته و بررسی چگونگی انجام فعّالیت‌ها در قالب کار گروهی، بخشی از ارزشیابی را تشکیل دهد. در ضمن، در امتحانات و ارزیابی‌های کلاسی، تکیه بر سنجش توانایی‌های حل مسأله و **به‌کارگیری** مفاهیم، تعاریف و قضایای کتاب می‌باشد.

در پایان، مؤلفان وظیفه‌ی خود می‌دانند از سرکار خانم حمیده داریوش همدانی، خانم فرحناز یوسفی، آقای مرتضی حسنی نسب و تمامیِ دیگر کسانی که با دلسوزی و وسواس، پیش‌نویس‌های کتاب را مورد تجزیه و تحلیل و نقّادی قرار داده و با نظرات سازنده‌ی خود ما را در تصحیح و ویرایش کتاب یاری داده‌اند تشکّر کنند. همچنین، شایسته است از اعضای محترم شورای ریاضیِ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی جهت نقد، بررسی و تصویب ریزموادّ و ارائه‌ی نظرات ارزنده در تألیف کتاب قدردانی شود.

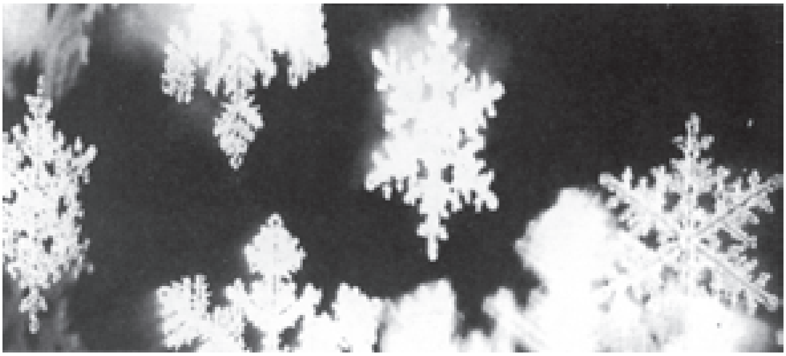
مؤلفان

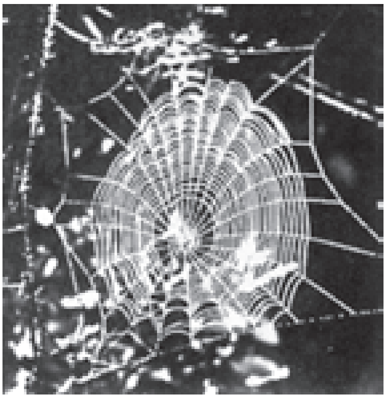
معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره‌ی مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران ــ صندوق پستی ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ــ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

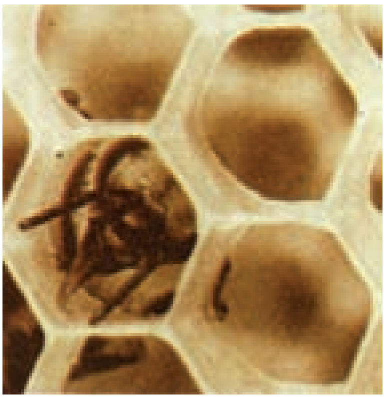
دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

فصل ۱

هندسه و استدلال





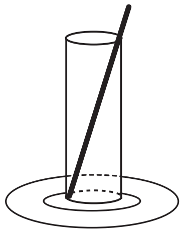


۱ــ۱ــ کشف اطلاعات از طریق مشاهده

تاکنون با بسیاری از مفاهیم هندسی از طریق مشاهده آشنا شده‌اید. گردی توپ‌ها، چرخ‌ها و سکه‌ها را دیده‌اید. کتاب‌های مستطیل شکل را خوانده‌اید. از قیف‌های مخروطی شکل بستنی خورده‌اید و احتمالاً شکل‌های زیبای دانه‌های برف و مارپیچ ظریف چندضلعی گونه‌ی تارعنکبوت و کندوی زنبور عسل شما را به شگفتی واداشته‌اند! این‌گونه مشاهدات، فرصت‌های مناسبی برای درک

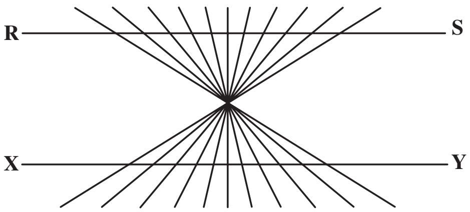
مفاهیم هندسی از قبیل شکل و اندازه را به‌وجود می‌آورند. با این حال، مشاهدات ما صددرصد قابل اطمینان نیستند و گاهی ما را به نتایج نادرست هدایت می‌کنند.

مثال ۱: در شکل ۱، قطر بشقاب بیشتر است یا بلندی لیوان؟



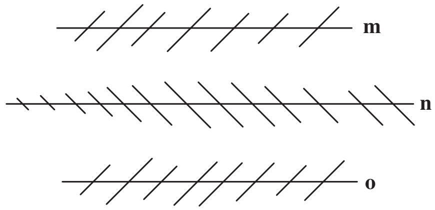
شکل ۱

مثال ۲: آیا RS و XY خط‌های راست هستند؟



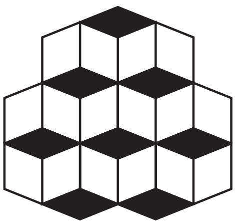
شکل ۲

مثال ۳: آیا خط‌های m ، n و o موازی هستند؟



شکل ۳

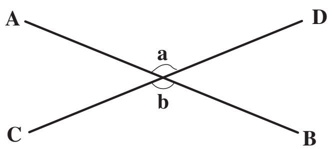
مثال ۴: شش بلوک در شکل وجود دارد یا هفت بلوک؟



شکل ۴

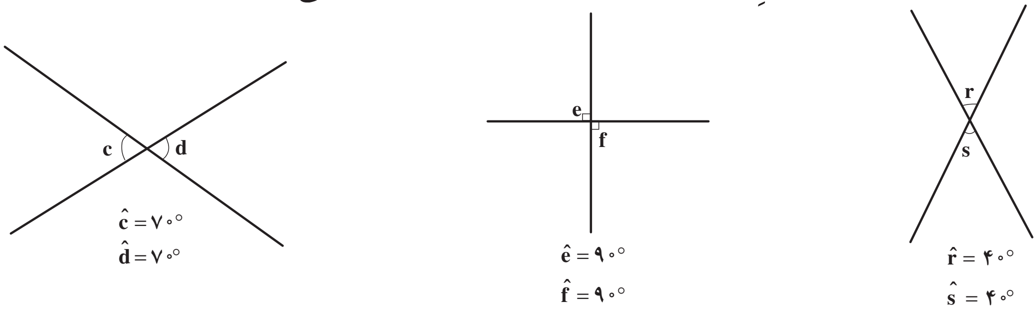
۱ــ۲ــ کشف اطلاعات از طریق تجربه

سارا هنگام نگاه کردن به خط‌های متقاطع شکل (۵)، به‌نظرش رسید که زاویه‌ی a با زاویه‌ی b برابر است. برای اطمینان، با استفاده از یک نقاله آن دو زاویه را اندازه‌گیری کرد و دریافت که هریک از آن‌ها تقریباً °۱۳۰ هستند. آن‌گاه در فکر فرورفت که آیا زاویه‌های متقابل به رأس همیشه مساوی



شکل ۵

هستند؟ او چند جفت خطوط متقاطع مانند شکل‌های صفحه‌ی بعد رسم کرد و مجدداً یک جفت از زاویه‌های متقابل به رأس هریک از آن‌ها را اندازه‌گیری کرد، سپس نتایج را یادداشت نمود.



شکل ۶

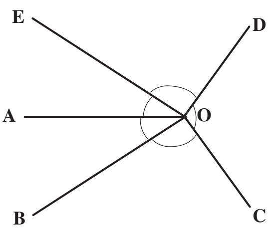
او بعد از این که این آزمایش را چندین بار تکرار کرد، با توجه به نتایج به‌دست آمده پیش‌بینی کرد که وقتی دو خط یکدیگر را قطع کنند، احتمالاً زاویه‌های متقابل به رأس پدید آمده همیشه مساوی یکدیگر خواهند بود. او به عنوان یک دانش‌آموز خوش‌فکر، کلمه‌ی «احتمالاً» را به کار برد، زیرا می‌دانست در هر اندازه‌گیری به دلایل مختلف از جمله لرزش دست و نوع ابزار، خطا وجود دارد. در نتیجه با اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر، ممکن است زاویه‌ها یک مقدار جزیی با یکدیگر تفاوت داشته باشند، همچنین می‌دانست که اگر زاویه‌های متقابل به رأسی پیدا شوند که مساوی یکدیگر نباشند، پیش‌بینی او رد خواهد شد (چرا؟).

به هر حال سارا آن‌قدر هوشیار بود که به نتایجی که هنوز تضمینی برای درستی آن‌ها وجود ندارد استناد نکند. اما احساس کرد که تجربه‌اش با ارزش است، زیرا ممکن است به کشف یک نتیجه‌ی مهم هندسی بیانجامد.

فعالیت ۱ــ۱ به شما این فرصت را می‌دهد تا فرآیند تجربه‌ی سارا، یعنی جمع‌آوری اطلاعات از طریق مشاهده و اندازه‌گیری را در موارد مختلف تکرار کنید.

فعالیت ۱ــ۱

۱. الف) اندازه‌ی زاویه‌های $A\hat{O}B$ ، $B\hat{O}C$ ، $C\hat{O}D$ ، $D\hat{O}E$ و $E\hat{O}A$ را برحسب درجه به‌دست آورید. مجموع همه‌ی زاویه‌های بالا که دورتا دور O هستند، چند درجه است؟



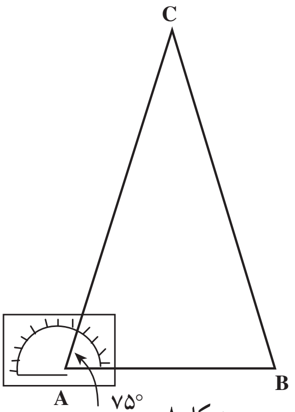
شکل ۷

ب) نقطه‌ی دیگری مانند O' در صفحه درنظر بگیرید و زاویه‌های $A\hat{O'}B$ ، $B\hat{O'}C$ ، $C\hat{O'}E$ و $E\hat{O'}A$ را با اندازه‌ای دلخواه به رأس O' رسم کنید. سپس زاویه‌ها را اندازه گرفته و نتایج را باهم جمع کنید.

پ) از قسمت‌های (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای را می‌توانید پیش‌بینی کنید؟

۲. چند مثلث رسم کنید. مجموع زاویه‌های هریک از مثلث‌ها را بیابید. حدس شما در مورد مجموع زاویه‌های هر مثلث دیگری غیر از این مثلث‌ها چیست؟

۳. الف) با استفاده از نقاله، مثلثی رسم کنید که دو زاویه 75° داشته باشد. طول ضلع‌های آن را اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.



شکل ۸

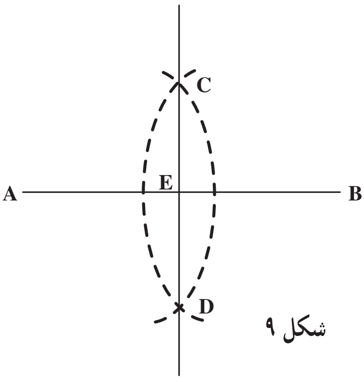
ب) مثلث دیگری رسم کنید که دو زاویه 40° داشته باشد. ضلع‌های آن را اندازه بگیرید و بازهم نتیجه را یادداشت کنید.

پ) چند مثلث دیگر رسم کنید که هریک از آن‌ها دو زاویه‌ی مساوی داشته باشند. ضلع‌های آن‌ها را نیز اندازه بگیرید. با توجه به نتایجی که به‌دست آوردید، آیا می‌توانید یک نتیجه‌گیری کلی را پیش‌بینی کنید؟

۴. روی یک صفحه‌ی کاغذ، سه نقطه‌ی غیرواقع در یک امتداد قرار دهید و آن‌ها را به ترتیب A ، B و C بنامید. AB ، BC و AC را رسم کنید. طول سه پاره‌خط را اندازه گرفته، مجموع دو ضلع کوتاهتر را به‌دست آورید. آیا این مجموع بیشتر از طول پاره‌خط بزرگتر است؟ این آزمایش را برای نقطه‌های دیگری تکرار کنید و هربار نتایج به‌دست آمده را یادداشت کنید. اگر برای هزار مثلث به‌نتیجه مشابه برسید آیا می‌توانید با اطمینان بگویید که این نتیجه‌گیری کلی برای همه‌ی مثلث‌ها درست است؟

۵. الف) پاره‌خط AB را رسم کنید.

ب) سوزن پرگار خود را در نقطه‌ی A قرار دهید و کمانی به شعاع بیش از نصف طول AB، چنان‌که در شکل ۹ نشان داده شده رسم کنید.



شکل ۹

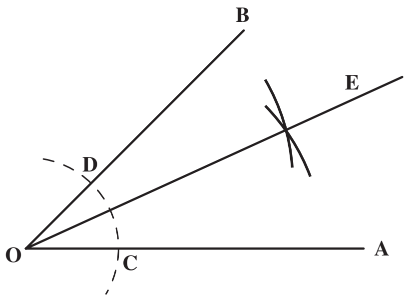
پ) به مرکز B و به همان شعاع کمان دیگری رسم کنید که کمان اول را در نقاط C و D قطع کند.

ت) با استفاده از خط‌کش خط CD را رسم کنید و محل برخورد CD و AB را E بنامید.

ث) طول‌های AE و BE را با خط‌کش اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.

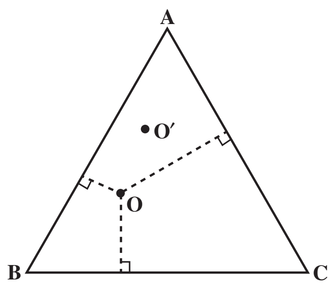
ج) زاویه‌های AEC و BEC را با نقاله اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.

چ) پاره‌خط‌های دیگری رسم کنید و مراحل (ب) تا (ج) را در مورد آن‌ها انجام دهید. سپس نتایج به‌دست آمده در هر مورد رابا نتیجه‌ی قبلی مقایسه کنید. آیا نتایج به‌دست آمده دارای الگوی منظمی هستند؟



شکل ۱۰

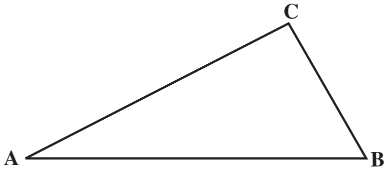
۶. زاویه‌ی AOB را مانند شکل ۱۰ رسم کنید. به مرکز O کمانی رسم کنید تا OB را در D و OA را در C قطع کند. به مراکز C و D کمان‌هایی با شعاع‌های مساوی رسم کنید تا یکدیگر را در E قطع کنند. OE را رسم کنید. چه مطلبی در مورد $A\hat{O}E$ و $E\hat{O}B$ درست به‌نظر می‌رسد؟ نتیجه خود را با اندازه‌گیری زاویه‌ها به‌وسیله‌ی نقاله امتحان کنید. این تجربه را با زاویه‌هایی با اندازه‌های مختلف تکرار کنید.



شکل ۱۱

۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنید. نقطه‌ی دلخواه O را درون مثلث اختیار کنید. سپس فاصله‌ی نقطه‌ی O را تا سه ضلع مثلث به‌دست آورده، مجموع این فاصله‌ها را محاسبه کنید. سه نقطه‌ی دیگر درون مثلث انتخاب کنید و مجموع فاصله‌های آن‌ها را نیز تا سه ضلع مثلث حساب کنید. آیا الگوی منظمی در نتایج به‌دست آمده دیده می‌شود؟ راجع به آن فکر کنید.

۸. مثلث ABC را چنان رسم کنید که در آن $\hat{A}$ کوچکتر از $\hat{B}$ باشد. اضلاع BC و AC را اندازه بگیرید. کدام یک بزرگتر است؟ مثلث دیگری رسم کنید که در آن $\hat{A}$ بزرگتر از $\hat{B}$ باشد و تعیین کنید در آن AC بزرگتر است یا BC . چند مثلث دیگر رسم کنید



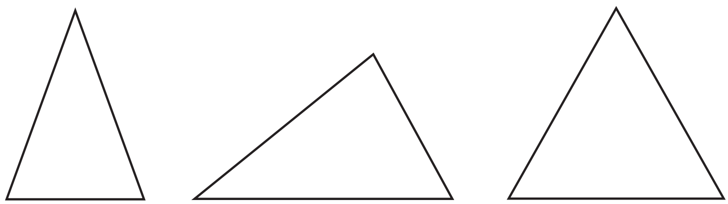
شکل ۱۲

که در آن‌ها $\hat{A}$ بزرگ‌تر از $\hat{B}$ و یا برعکس، $\hat{B}$ بزرگ‌تر از $\hat{A}$ باشد. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث پیش‌بینی می‌کنید؟

در فعالیت‌های بالا، با بررسی حالت‌های مختلف چند نتیجه کلی را پیش‌بینی کردیم. چنین استدلالی، **استدلال استقرایی** خوانده می‌شود. باید توجه داشته باشیم که این استدلال نتایجی را که از طریق آن به‌دست می‌آیند، اثبات نمی‌کند.

فعالیت ۱ـــ۲

۱. به کمک خط‌کش و پرگار عمودمنصف ضلع‌های مثلث‌های زیر را رسم کنید (این رسم‌ها را در کتاب انجام دهید).



شکل ۱۳

۲. درهریک از موارد فوق مشخص کنید نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌ها نسبت به مثلث‌ها چه وضعی دارند؟

۳. مثلث دلخواه دیگری رسم کنید و بندهای ۱ و ۲ را در مورد آن تحقیق نمایید.

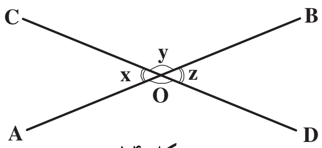
۴. با توجه به تجربیات فوق، به‌نظر شما محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های یک مثلث نسبت به آن چه وضعی دارد؟

۵. مثلث ABC را چنان رسم کنید که $AB = ۶cm$ ، $BC = ۳cm$ و $AC = ۴cm$. سپس بندهای ۱ و ۲ را در مورد آن تکرار کنید. آیا نتیجه‌ی به‌دست آمده از این بند، نظر شما در بند ۴ را تأیید می‌کند؟

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل مشاهده کردید، نتیجه‌ی به‌دست آمده از بررسی چند مورد، ممکن است درهمه‌ی موارد برقرار نباشد. بنابراین از طریق استدلال استقرایی نمی‌توان نتایج قطعی به‌دست آورد. با این حال، فرآیند استدلال استقرایی با تقویت شهود و ارائه اطلاعات مفید ما را قادر می‌سازد حدس‌های احتمالاً درستی بزنیم، ولی برای اطمینان از درستی حدس‌ها به روش‌های دیگری از استدلال نیاز داریم.

مثال ۵: سارا با جمع‌آوری اطلاعات از طریق مشاهدات و اندازه‌گیری‌های خود، یعنی به‌کمک استدلال استقرایی پیش‌بینی کرد که هردو زاویه‌ی متقابل به رأس برابرند. اما او نمی‌توانست برای نشان دادن درستی پیش‌بینی خود هردو خط متقاطع ممکن را رسم کند و در نتیجه نمی‌توانست با اطمینان بگوید که پیش‌بینی او در همه‌ی موارد دیگر نیز درست است. پس او سعی کرد با استناد به حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته بود، نشان دهد که پیش‌بینی او همواره درست است. یعنی زاویه‌های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع باهم برابرند.

استدلال سارا: شکل ۱۴ دو خط متقاطع دلخواه را نشان می‌دهد.



شکل ۱۴

چون $A\hat{O}B$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است.

(۱) $x+y=۱۸۰^\circ$

چون $C\hat{O}D$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است

(۲) $y+z=۱۸۰^\circ$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) داریم

(۳) $x+y=y+z$

در نتیجه : $x=z$

بنابراین $D\hat{O}B = A\hat{O}C$. به طریق مشابه، $A\hat{O}D = C\hat{O}B$.

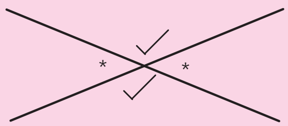
استدلال ارائه شده در مثال بالا، نمونه‌ای از **استدلال استنتاجی** است.

> استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

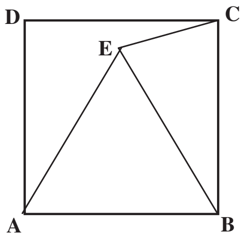
نتایج مهم و مفیدی که از استدلال استنتاجی به دست می‌آید **قضیه** نامیده می‌شوند.

قضیه‌ی ۱: زاویه‌های متقابل به رأس

زاویه‌های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع با یک‌دیگر مساویند.



مثال ۶: چهارضلعی ABCD یک مربع و ABE یک مثلث متساوی‌الاضلاع است (شکل ۱۵). نشان دهید که مثلث BCE متساوی‌الساقین است.



شکل ۱۵

حل : چون چهارضلعی ABCD ، مربع است

$AB = CB$ (۱)

چون مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است

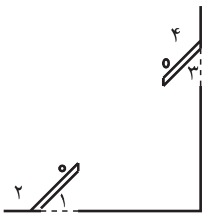
$AB = EB$ (۲)

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$CB = EB$

بنابراین، مثلث BCE متساوی‌الساقین است.

مثال ۷: داخل اتاقی دو در وجود دارد که هردوی آن‌ها به یک اندازه باز شده‌اند (شکل ۱۶)، یعنی $\hat{۳} = \hat{۱}$. می‌خواهیم با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهیم که $\hat{۴} = \hat{۲}$.



شکل ۱۶

حل: چون $\hat{۱}$ و $\hat{۲}$ مکمل یکدیگر هستند

$\hat{۱} + \hat{۲} = ۱۸۰^\circ$ (۱)

$\hat{۲} = ۱۸۰^\circ - \hat{۱}$

چون $\hat{۳}$ و $\hat{۴}$ مکمل یکدیگر هستند

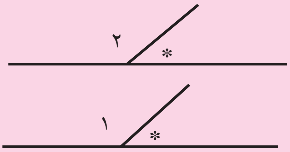
$$\hat{۳}+\hat{۴}=۱۸۰^\circ$$

$$\hat{۴}=۱۸۰^\circ-\hat{۳} \qquad (۲)$$

چون $\hat{۳}=\hat{۱}$ ، از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که عبارت‌های سمت راست مساوی یکدیگرند. بنابراین $\hat{۴}=\hat{۲}$.

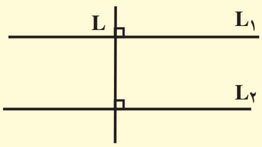
قضیه‌ی ۲: دو زاویه‌ی مکمل

اگر دو زاویه مساوی باشند، مکمل‌های آن‌ها نیز با یکدیگر مساویند. $\hat{۲}=\hat{۱}$



یکی از حقایقی که در ریاضیات دوره‌ی راهنمایی با آن آشنا شدیم. به‌صورت زیر است :

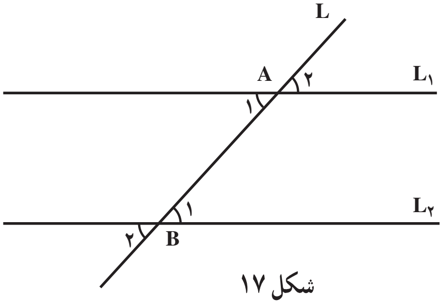
اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.



به عنوان مثال، اگر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ باهم موازی باشند و خط L بر $L_۱$ عمود باشد، بر $L_۲$ هم عمود خواهد بود. در این حالت ۸ زاویه‌ی قائمه پدید می‌آید که همه‌با هم برابرند.

این یکی از حقایقی است که درستی آن را پذیرفته‌ایم، اما اگر خطی دو خط موازی را طوری قطع کند که بر آن‌ها عمود نباشد، زاویه‌های پدید آمده چگونه‌اند؟

در شکل روبه‌رو دو خط $L_۱$ و $L_۲$ ، باهم موازی‌اند و خط L این دو خط را در نقطه‌های A و B قطع کرده است. در سال‌های قبل با استفاده از همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه و حقیقی که در بالا بدون اثبات پذیرفته‌ایم، ثابت کردیم که $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$ است.



شکل ۱۷

قضیه‌ی ۳: خطوط موازی

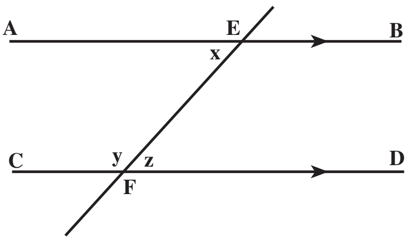
اگر خط L دو خط L_1 و L_2 را قطع کند و زاویه‌های $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ را پدید آورد (شکل ۱۷) :

الف) اگر L_1 و L_2 باهم موازی باشند، آن‌گاه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ است.

ب) اگر $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ باشد، آن‌گاه L_1 و L_2 باهم موازی‌اند.

تمرین. اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آیا دیگری را هم قطع خواهد کرد؟ چرا؟

مثال ۸: با توجه به قضیه فوق، نشان دهید که مجموع اندازه‌های دو زاویه‌ی AEF و CFE یعنی x و y برابر 180° است.



حل: چون $C\hat{F}D$ نیم‌صفحه است، پس

$$y + z = 180^\circ$$

هم‌چنین بنابر قضیه خطوط موازی،

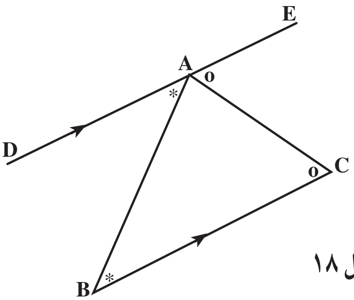
$$x = z$$

بنابراین :

$$y + x = 180^\circ$$

مثال ۹: با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی، نشان دهید که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

حل: مثلث دلخواه ABC را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۸). از A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم و آن را DE می‌نامیم. چون DE موازی BC است.



شکل ۱۸

$$E\hat{A}C = \hat{C} \qquad (1)$$

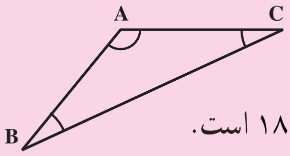
$$D\hat{A}B = \hat{B} \qquad (2)$$

از طرف دیگر، چون $D\hat{A}E$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است، بنابراین :

$$D\hat{A}B + B\hat{A}C + E\hat{A}C = 180^\circ$$

از روابط (۱) و (۲) مقدارهای مساوی $E\hat{A}C$ و $D\hat{A}B$ را جایگزین می‌کنیم، در نتیجه :

$$\hat{B}+B\hat{A}C+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$



قضیه‌ی ۴: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث

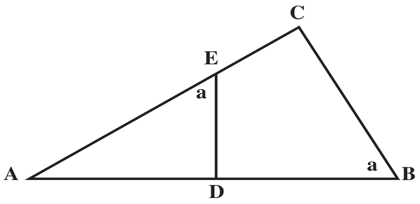
در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی، ۱۸۰° است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

در این جا، با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی، نشان دادیم که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، صرف‌نظر از نوع آن ۱۸۰° است. چنان‌که در بند ۲، فعالیت ۱ــ۱، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث‌های متعددی را به‌دست آوردیم و با توجه به یکسان بودن نتایج به‌دست آمده، این نتیجه‌گیری کلی را پیش‌بینی کردیم.

مثال ۱۰: در شکل ۱۹، $A\hat{E}D = A\hat{B}C = a$.

با استفاده از قضیه فوق نشان دهید که، $A\hat{D}E = A\hat{C}B$.



شکل ۱۹

حل: در مثلث ADE

(۱) $\hat{A}+a+A\hat{D}E=۱۸۰^\circ$

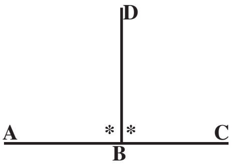
در مثلث ACB

(۲) $\hat{A}+a+A\hat{C}B=۱۸۰^\circ$

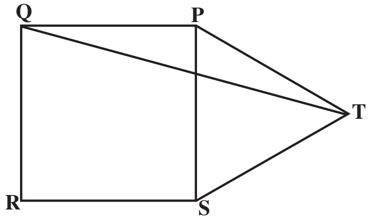
از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$A\hat{D}E=A\hat{C}B$$

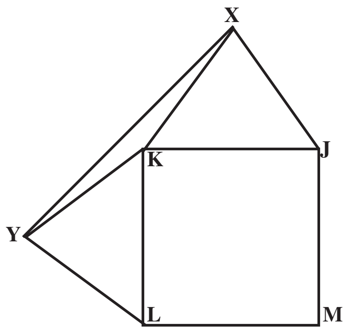
مسائل



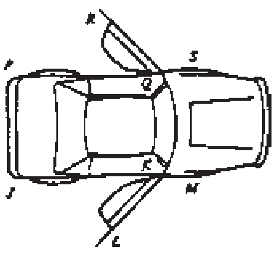
۱. از نقطه‌ی B روی خط AC پاره‌خط BD را طوری رسم کرده‌ایم که $A\hat{B}D = C\hat{B}D$. چرا $A\hat{B}D =$ ۹۰° ؟



۲. PQRS یک مربع و PST یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید مثلث PQT متساوی‌الساقین است؟



۳. JKLM یک مربع و مثلث‌های JXK و KYL هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. نشان دهید مثلث KXY متساوی‌الساقین است.



۴. با توجه به تصویر ماشین $J\hat{K}L = P\hat{Q}R$ ، چرا $R\hat{Q}S = L\hat{K}M$ ؟ دلیل خود را بنویسید. (دوطرف ماشین را دو خط فرض کنید.)

۵. مجموع دو زاویه ۹۰° است. مجموع مکمل‌های آن‌ها چنددرجه است؟

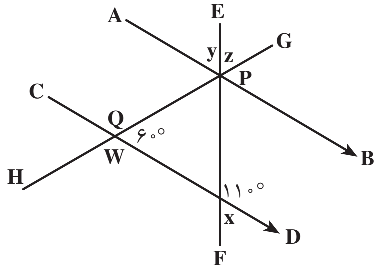
۶. دو زاویه مکمل یکدیگرند. در حالت‌های زیر، اندازه‌ی هریک را مشخص کنید.

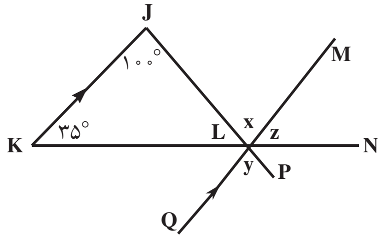
الف) دو زاویه مساوی باشند.

ب) یک زاویه دو برابر دیگری باشد.

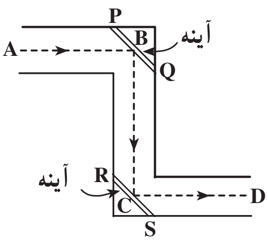
پ) یک زاویه n برابر دیگری باشد.

۷. اندازه‌ی زاویه‌هایی را که به وسیله‌ی حروف کوچک مشخص شده‌اند، پیدا کنید.

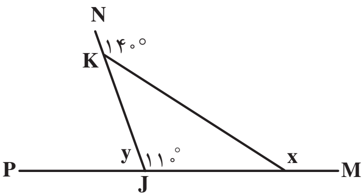


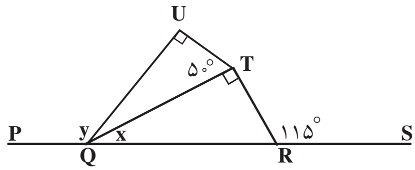


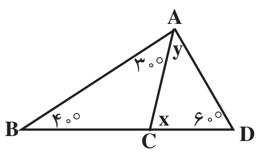
۸. در ساختمان پریسکوپ یک جفت آینه‌ی موازی وجود دارد. به این ترتیب شعاع‌های نور که در بالا وارد پریسکوپ می‌شوند، موازی شعاع‌های نوری هستند که در پایین از پریسکوپ خارج می‌شوند. زاویه‌های مساوی در شکل را نام ببرید.

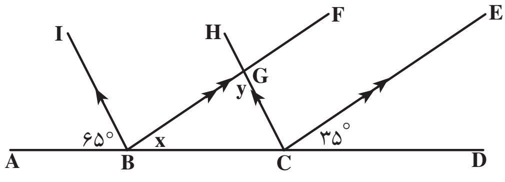


۹. در هریک از شکل‌های زیر، مقادیر x و y را پیدا کنید.



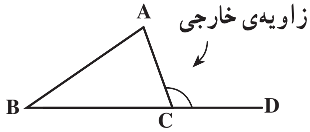






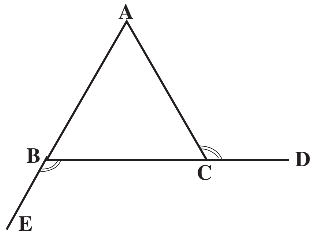
۱۰. نشان دهید که در مثلث دلخواه ABC ،

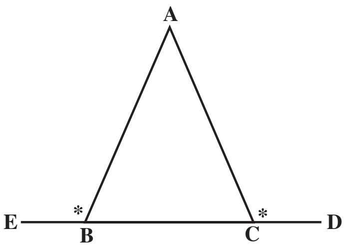
$A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$



(زاویه‌ای که از امتداد دادن یک ضلع تشکیل می‌شود، زاویه‌ی خارجی نامیده می‌شود.)

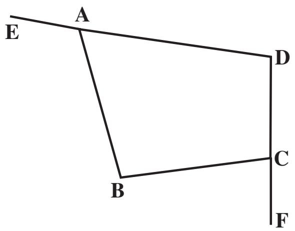
۱۱. با توجه به تساوی زاویه‌های مشخص شده در شکل زیر، علت تساوی $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ را توضیح دهید.



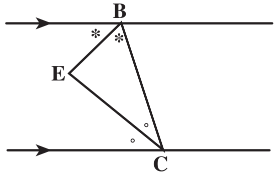


۱۲. با توجه به شکل مقابل درستی رابطه‌ی زیر را نشان دهید.

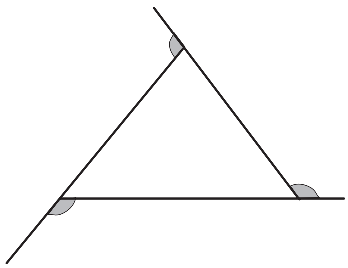
$E\hat{A}B + B\hat{C}F = \hat{B} + \hat{D}$



۱۳. در شکل مقابل، ثابت کنید : $\hat{E} = 90^\circ$



۱۴. مجموع زاویه‌های خارجی مثلث روبه‌رو را بیابید. آیا این یافته در مورد مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث درست است؟ جواب خود را با ذکر دلیل بنویسید.



۱۵. تفاوت عمده میان استدلال استقرایی و استنتاجی را بنویسید و برای هریک، مثالی بیاورید.

۱ــ۳ــ استدلال در هندسه

تعریف مربع را درنظر بگیرید، «مربع مستطیلی است که ضلع‌های آن با یکدیگر برابرند».

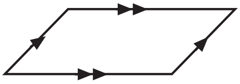
لازمه‌ی فهمیدن این تعریف، دانستن معنای دقیق واژه‌های «مستطیل» و «ضلع» است. به این ترتیب برای تعریف مربع به تعریف‌های دیگری نیازمندیم. به عنوان مثال،

مستطیل متوازی‌الاضلاعی با چهار زاویه‌ی مساوی است.



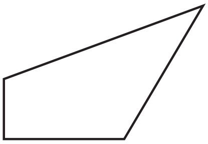
↓

متوازی‌الاضلاع چهارضلعیی است که ضلع‌های مقابل آن موازی یکدیگرند.



↓

چهارضلعی شکلی با چهارضلع است.

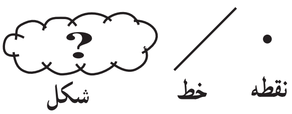


↓

شکل یک ...

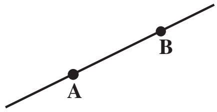


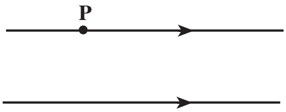
فرض کنید شکل را به عنوان مجموعه‌ی نقاط تعریف کنیم، چون هر تعریف شامل واژه‌هایی است که معنی آن‌ها باید دقیقاً روشن باشد، در نتیجه این سؤال پیش می‌آید که تعریف مجموعه و نقطه چیست؟ با ادامه‌ی این فرآیند به بن‌بست می‌رسیم! زیرا این عمل را نمی‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد. علت این محدودیت آن است که همه‌ی واژه‌ها قابل تعریف نیستند. در نتیجه، برای رهایی از این بن‌بست، واژه‌ها و مفاهیمی چون شکل، مجموعه، نقطه و خط را با توجه به این که تعریف صریحی برای آن‌ها نداریم، به عنوان **تعریف نشده‌ها** می‌پذیریم.



همچنین در مثال‌های قبل، درستی بعضی از ویژگی[1] های هندسی را به‌وسیله‌ی استدلال استنتاجی نشان دادیم. در آن مثال‌ها، استنتاج‌های ما براساس حقایقی بود که درستی آن‌ها را پذیرفته بودیم. این حقایق یا عبارت‌های درست، **اصول**[2] نامیده می‌شوند. به عنوان مثال،

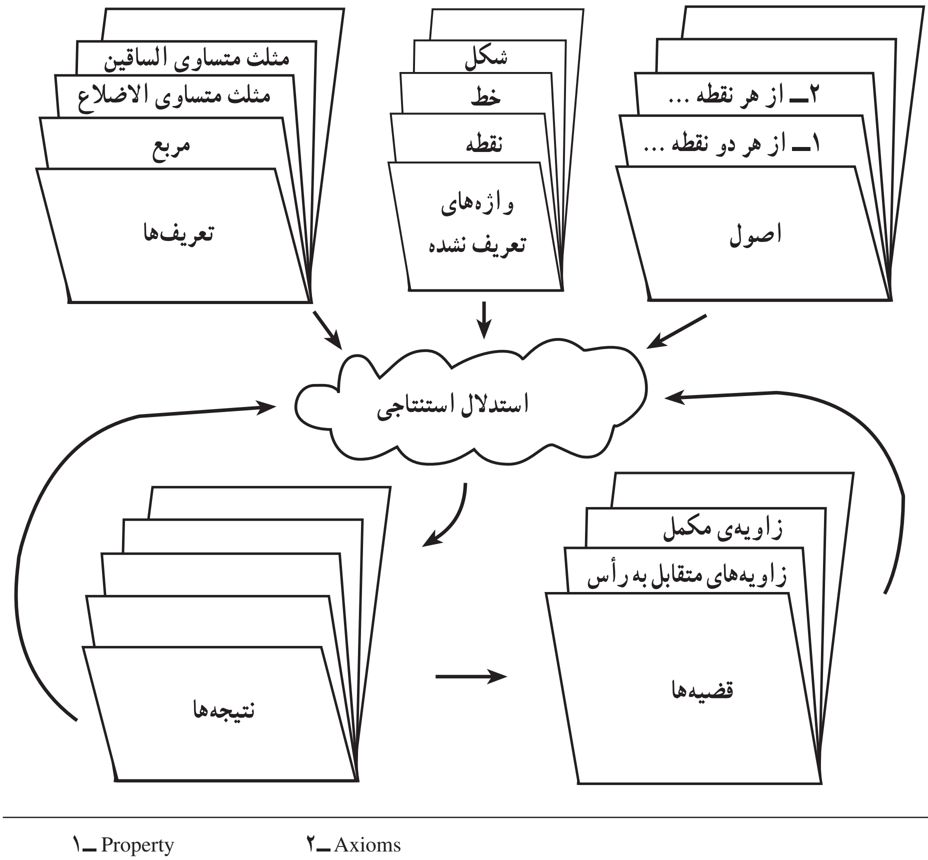
از دو نقطه‌ی متمایز فقط یک خط می‌گذرد.





از هر نقطه تنها یک خط می‌توان به موازات خط داده شده رسم کرد.

وقتی در هندسه استدلال استنتاجی به‌کار می‌بریم، می‌توانیم از تعریف‌ها، اصول، واژه‌های تعریف نشده و قضیه‌ها برای رسیدن به نتیجه استفاده کنیم.

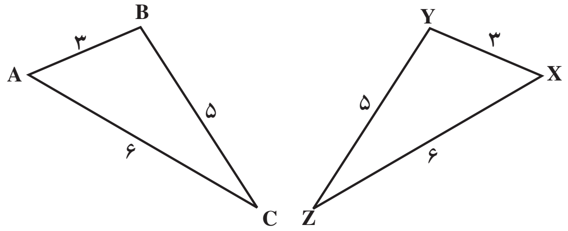


۱ـ Property ۲ـ Axioms

تمرین: با دقّت بیشتری به نمودار صفحه‌ی قبل نگاه کنید و با توجه به مطالب مطرح شده، استدلال استنتاجی را توضیح دهید.

۱ــ۴ــ مثلث‌های همنهشت[۱]

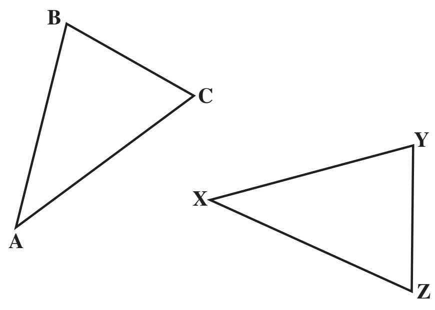
مثلث‌های ABC و XYZ دارای ضلع‌های متناظر مساوی هستند (شکل ۲۰). در نتیجه محیط آن‌ها باهم برابر است. همچنین زاویه‌ها نظیر به نظیر و مساحت‌های آن‌ها نیز باهم برابر هستند.



شکل ۲۰

در واقع هریک از آن‌ها را می‌توانیم کاملاً روی دیگری قرار دهیم. به‌طوری که دقیقاً برهم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند. این ویژگی انطباق کامل شکل‌ها، **همنهشتی** نامیده می‌شود. برای آنکه نشان دهیم دو مثلث ABC و XYZ همنهشت هستند، می‌نویسیم : $ABC \cong XYZ$ و منظور آن است که این دو مثلث با انطباق رأس A روی رأس X ، رأس B روی رأس Y و رأس C روی رأس Z کاملاً برهم منطبق می‌شوند.

فرض کنید دو مثلث ABC و XYZ همنهشت باشند (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

۱ــ Congruent triangles

بنابراین می‌توانیم مثلث ABC را طوری روی مثلث XYZ قرار دهیم که A روی X ، B روی Y و C روی Z قرار گیرد. در نتیجه،

$$\hat{A}=\hat{X} \qquad AB=XY$$

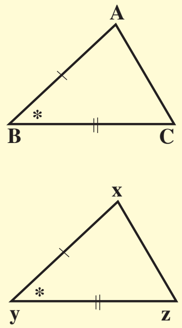
$$\hat{B}=\hat{Y} \qquad BC=YZ \qquad ABC \cong XYZ$$

$$\hat{C}=\hat{Z} \qquad AC=XZ$$

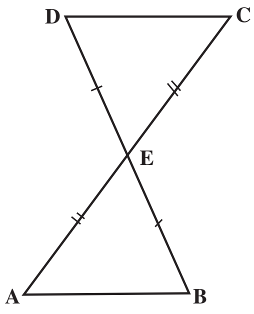
برای نشان دادن همنهشت بودن دو مثلث، همان‌طور که قبلاً دیده‌اید، کافی است نشان دهیم که یکی از سه حالت زیر برقرار است.

حالت (ض‌زض)

هرگاه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



مثال ۱۱: در شکل ۲۲، E وسط AC و BD است. چرا AB = CD ؟ (جواب خود را با ذکر دلیل بنویسید.)



شکل ۲۲

حل: بنا به قضیه‌ی زاویه‌های متقابل به رأس، زاویه‌های CED و AEB باهم برابرند. در مثلث‌های ABE و CED

$AE = CE$

$A\hat{E}B = C\hat{E}D$

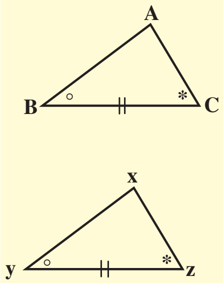
$EB = DE$

بنابراین، بنابه حالت (ض‌زض)، $ABE \cong CDE$.

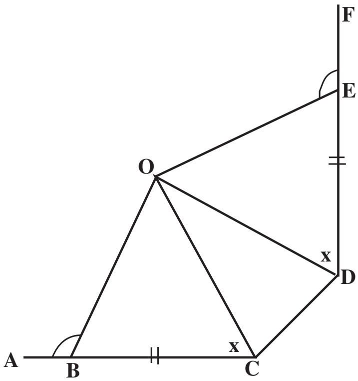
چون مثلث‌ها همنهشت هستند، در نتیجه $AB = CD$.

حالت (زض‌ز)

هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



مثال ۱۲: در شکل ۲۳، $BC = ED$ ، $O\hat{B}A = O\hat{E}F$ و $O\hat{C}B = O\hat{D}E$. نشان دهید



شکل ۲۳

حل: بنابه قضیه‌ی زاویه‌ی مکمل

$O\hat{B}C = O\hat{E}D$

در مثلث‌های OBC و OED

$O\hat{B}C = O\hat{E}D$

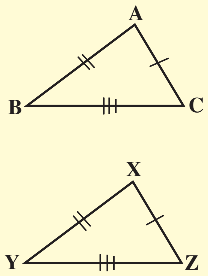
$BC = ED$

$O\hat{C}B = O\hat{D}E$

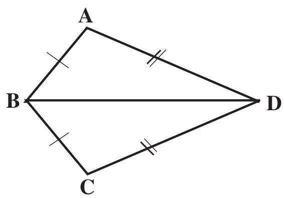
بنابراین، بنابه حالت (زضز)، $OBC \cong OED$ چون مثلث‌ها همنهشت هستند، $B\hat{O}C = E\hat{O}D$.

حالت (ضضض)

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



مثال ۱۳: در شکل ۲۴، $AB = BC$ و $AD = DC$. نشان دهید $\hat{A} = \hat{C}$.



شکل ۲۴

حل: در دو مثلث ABD و BDC داریم

$AB = BC$

$AD = DC$

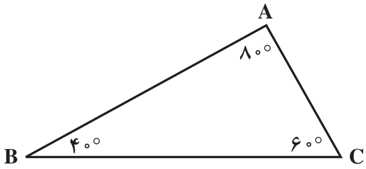
$BD = BD$

بنابراین، بنا به حالت (ضضض)، $ABD \cong CBD$

چون مثلث‌های CBD و ABD همنهشت هستند، بنابراین اجزای نظیر آن‌ها قابل انطباق برهم خواهند بود یعنی $\hat{A} = \hat{C}$.

سه حالت همنهشتی دو مثلث از حقایق پذیرفته شده هستند، با این حال می‌توان دو حالت (زضز) و (ضضض) را از حالت اول نتیجه گرفت.

فعالیت ۱ــ۳

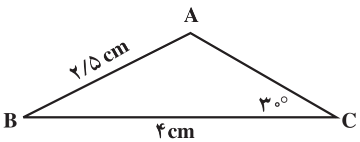


شکل ۲۵

۱. الف) مثلث DEF را چنان رسم کنید که $\hat{D}=\hat{A}$ ، $\hat{E}=\hat{B}$ و $\hat{F}=\hat{C}$ ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۵) همنهشت نباشد.

ب) چند مثلث دیگر با شرایط مثلث DEF می‌توانید رسم کنید؟ چرا؟

پ) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

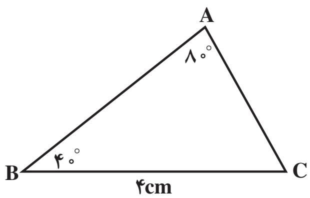


شکل ۲۶

۲. الف) مثلث DEF را چنان رسم کنید که در آن DE = AB ، EF = BC و $\hat{F}=\hat{C}$ ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۶) همنهشت نباشد.

ب) آیا تنها مثلثی که می‌توانید با شرایط فوق رسم کنید، همان DEF است؟ چرا؟

پ) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



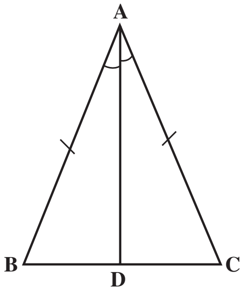
شکل ۲۷

۳. الف) آیا می‌توانید مثلث DEF را چنان رسم کنید که $\hat{D}=\hat{A}$ ، $\hat{E}=\hat{B}$ و EF = BC ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۷) همنهشت نباشد؟ جواب خود را با ذکر دلیل توضیح دهید.

ب) از بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱ــ۵ــ مثلث متساوی‌الساقین

در هر مثلث متساوی‌الساقین دو ضلع برابر وجود دارد که ساق نامیده می‌شوند، به همین دلیل این‌گونه مثلث‌ها متساوی‌الساقین نامیده می‌شوند. در شکل ۲۸، مثلث ABC متساوی‌الساقین است (AB = AC) . در بخش قبل از طریق استدلال استقرایی مشاهده کردید که اگر در مثلثی دو زاویه‌ی



شکل ۲۸

برابر وجود داشته باشد آن مثلث متساوی‌الساقین است. اکنون نشان می‌دهیم در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مقابل به اضلاع مساوی، با یکدیگر برابرند $(\hat{B}=\hat{C})$. درستی این نتیجه‌گیری کلی را، با استفاده از استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم. برای این منظور، از رأس A خطی چنان رسم می‌کنیم که $\hat{A}$ را نصف کرده و BC را در D قطع کند (AD نیمساز زاویه‌ی A است). در مثلث‌های ABD و ACD.

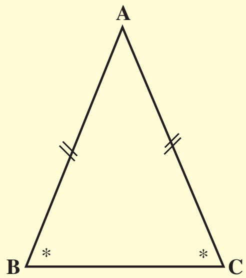
$$AB = AC$$

$$B\hat{A}D = C\hat{A}D$$

$$AD = AD$$

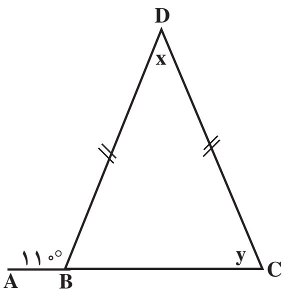
بنابراین، بنابه حالت (ض‌زض)، $ABD \cong ACD$. چون مثلث‌ها همنهشت هستند، در نتیجه $\hat{B}=\hat{C}$.

با توجه به این‌که درستی مطلب را برای یک مثلث متساوی‌الساقین دلخواه نشان دادیم، بنابراین نتیجه‌ی به‌دست آمده برای تمام مثلث‌های متساوی‌الساقین درست است.



قضیه‌ی ۵: مثلث متساوی‌الساقین

در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.



شکل ۲۹

مثال ۱۴: در شکل ۲۹، مقادیر x و y را پیدا کنید.

حل: چون $A\hat{B}C$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است

$$D\hat{B}C + ۱۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$D\hat{B}C = ۷۰^\circ$$

با توجه به قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های DBC و DCB باید باهم برابر باشند.

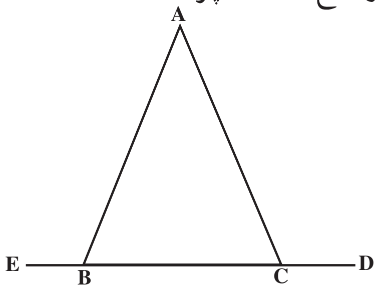
پس : $y = ۷۰^\circ$

چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، در نتیجه

$x + ۷۰^\circ + ۷۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

$x = ۴۰^\circ$

مثال ۱۵: در شکل ۳۰، $AB = AC$. توضیح دهید که چرا $A\hat{B}E = A\hat{C}D$.



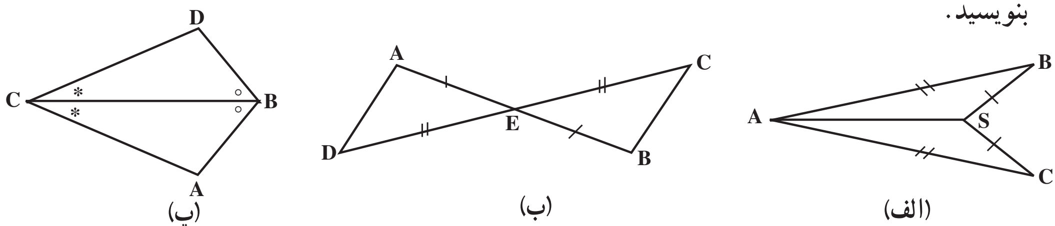
شکل ۳۰

حل: بنابه قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین، $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

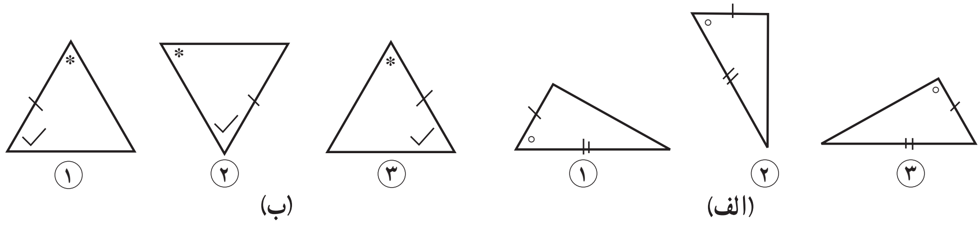
و بنا به قضیه‌ی دو زاویه‌ی مکمل، $A\hat{B}E = A\hat{C}D$

مسائل

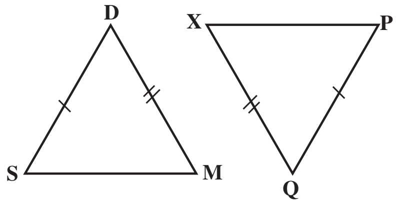
۱. ابتدا دلیل همنهشت بودن مثلث‌ها را بگویید، سپس تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را بنویسید.



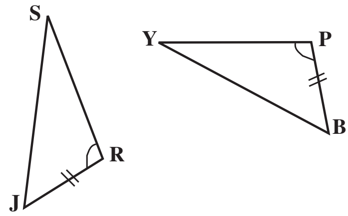
۲. مثلث‌های همنهشت را مشخص کنید وحالت همنهشتی آن‌ها را بیان نمایید.



۳. با توجّه به شکل‌های زیر، تساوی کدام‌یک از اجزا، همنهشتی مثلث‌ها را در (الف) و (ب) نتیجه می‌دهد؟

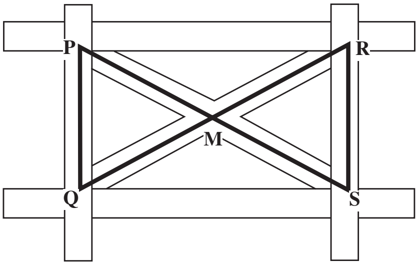


(ب)

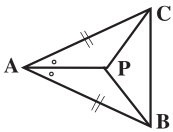


(الف)

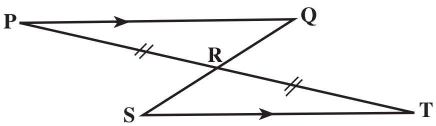
۴. نقطه‌ی M وسط قطعات متقاطع است. چرا MPQ ≅ MSR ؟



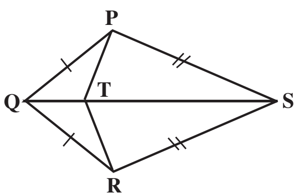
۵. دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث PBC را بنویسید.



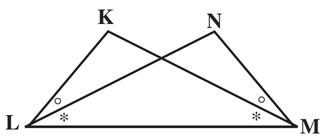
۶. اگر PQ||ST و R وسط PT باشد، ثابت کنید R وسط QS نیز هست.



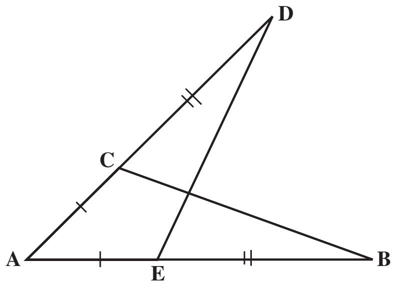
۷. در چهارضلعی PQRS ، PQ = RQ و PS = RS . اگر T نقطه‌ی دلخواهی روی قطر QS باشد، ثابت کنید PT = RT .



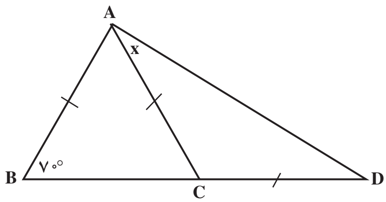
۸. در شکل مقابل ثابت کنید KL = NM .



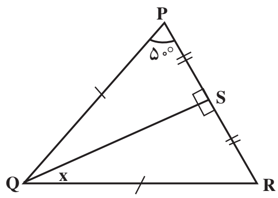
۹. در شکل روبه‌رو ثابت کنید BC = DE .



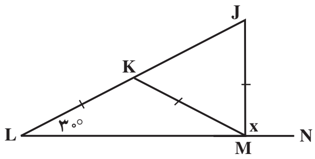
۱۰. در هریک از شکل‌های زیر، مقدار x را تعیین کنید.



(الف)



(ب)



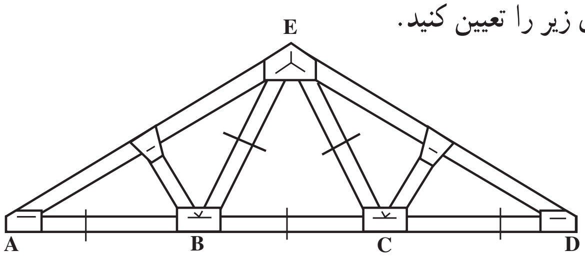
(پ)

۱۱. مقدار هریک از زاویه‌های زیر را تعیین کنید.

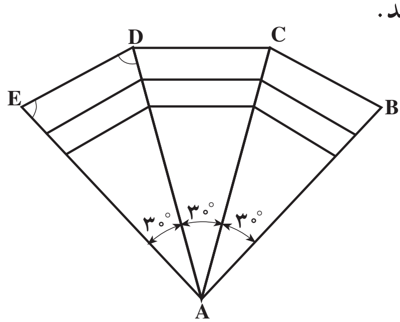
الف) $B\hat{E}C$

ب) $A\hat{B}E$

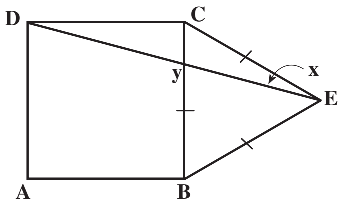
پ) $E\hat{A}B$



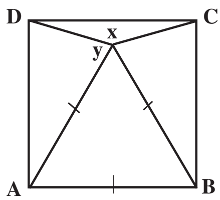
۱۲. شکل زیر طرح یک تالار را نشان می‌دهد. اگر هرسه بخش مثلثی شکل همنهشت باشند، اندازه‌ی $B\hat{C}D$ را تعیین کنید.



۱۳. در هریک از شکل‌های زیر، ABCD یک مربع است. اندازه‌های x و y را به‌دست آورید.

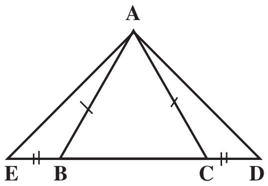


(ب)

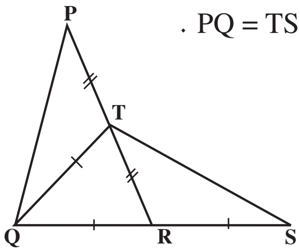


(الف)

۱۴. با توجه به شکل، ثابت کنید که $AD = AE$.



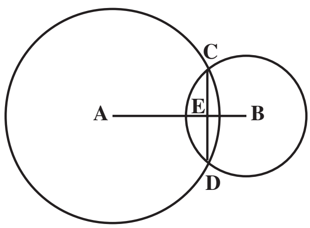
۱۵. در شکل روبه‌رو، ثابت کنید $P\hat{T}Q = T\hat{R}S$ و $PQ = TS$.



۱۶. دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در C و D قطع کرده‌اند.

الف) ثابت کنید $A\hat{C}B = A\hat{D}B$.

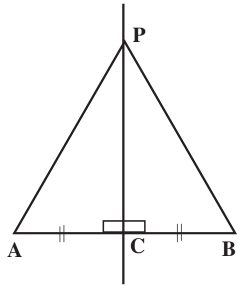
ب) ثابت کنید که AB ، عمودمنصف CD است.



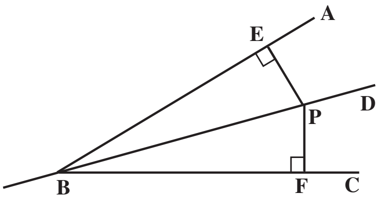
۱۷. درچهارضلعی PQRS ، $PQ = QR$ و قطر QS ، زاویه‌ی Q را نصف می‌کند. ثابت کنید $PS = RS$.

۱۸. اگر XY و WZ قطرهایی از یک دایره باشند، ثابت کنید $XW = YZ$.

۱۹. ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمودمنصف پاره‌خط AB از نقاط A و B به یک فاصله است.



۲۰. نشان دهید که هر نقطه مانند P روی نیمساز زاویه‌ی ABC ، از ضلع‌های AB و BC به یک فاصله است.

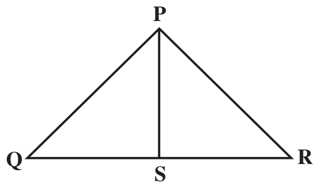


۲۱. در مثلث PQR ، PQ = PR و PS میانه‌ی وارد بر ضلع QR است. ثابت کنید :

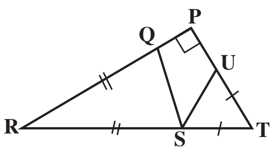
الف) PS نیمساز زاویه‌ی QPR است.

ب) $PS \perp QR$ (PS و QR عمود است).

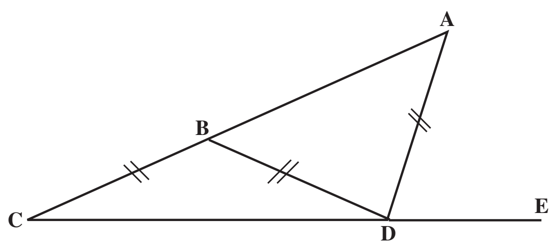
پ) از دو قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۲۲. با توجه به شکل، توضیح دهید که چرا $Q\hat{S}U = ۴۵^\circ$



۲۳. با توجه به شکل زیر، توضیح دهید چرا $A\hat{D}E = ۳A\hat{C}E$

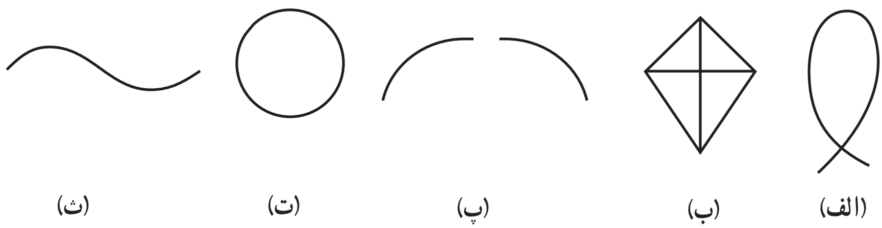


۲۴. از طریق استدلال استنتاجی ثابت کنید مثلثی که دو زاویه‌ی مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۱ــ۶ــ از «خَم ساده» تا «چندضلعی»

آیا تا به حال با یک قطعه نخ، شکلی روی سطح میز ساخته‌اید؟ این‌گونه شکل‌ها می‌توانند تصور خم مسطح را برای شما به‌وجود آورند. به‌طور شهودی، یک **خم مسطح** مجموعه‌ای از نقطه‌ها است که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم. پس از این، در این کتاب، همه‌ی خم‌ها را مسطح درنظر می‌گیریم.

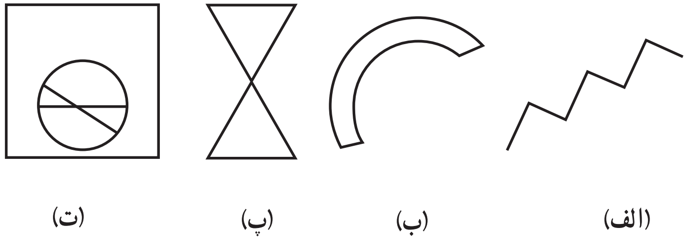
از این تعریف می‌توان نتیجه گرفت که خط‌ها، نیم‌خط‌ها، پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها همه خم‌های مسطح هستند. در شکل ۳۱، نمونه‌های (الف)، (ب)، (ت) و (ث) هرکدام یک خم هستند ولی نمونه (پ) یک خم نیست، زیرا نمی‌توان بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ آن را رسم کرد.



شکل ۳۱

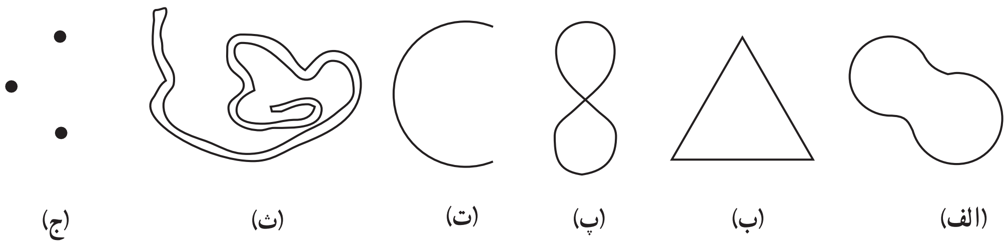
یک خم ساده، یک خم مسطح است که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. در شکل ۳۱، (ت) و (ث) خم‌های ساده هستند، ولی (الف) و (ب) خم‌های ساده نیستند. اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم **بسته** نامیده می‌شود.

مثال ۱: در شکل ۳۲ مورد (الف)، خم ساده است ولی بسته نیست، مورد (ب) یک خم ساده‌ی بسته است، موردهای (پ) و (ت) خم‌های ساده‌ی بسته نیستند. چرا؟



شکل ۳۲

مثال ۲: کدام یک از شکل‌های زیر نمایش‌دهنده‌ی خم، خم ساده، خم بسته یا خم ساده‌ی بسته هستند؟



شکل ۳۳

حل:

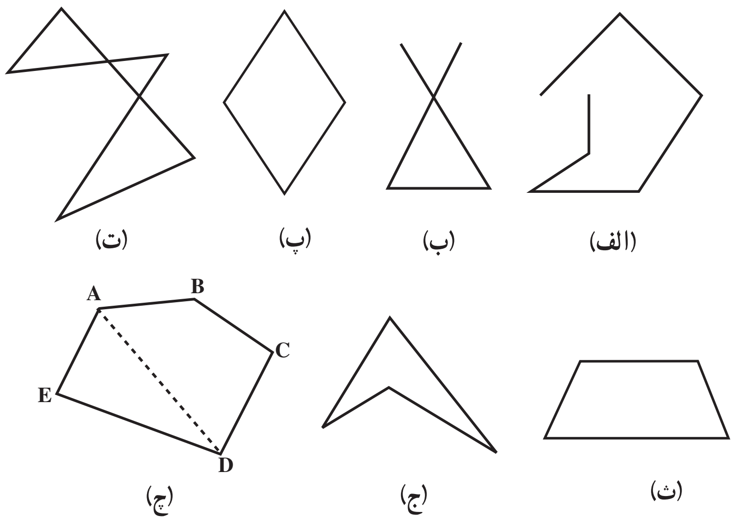
ـ شکل‌های (الف)، (ب)، (پ)، (ت) و (ث) خم هستند.

ـ شکل‌های (الف)، (ب)، (ت) و (ث) خم‌های ساده هستند.

ـ شکل‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ث) خم‌های بسته هستند.

ـ شکل‌های (الف)، (ب) و (ث) خم‌های ساده‌ی بسته هستند.

تمرین: با توجه به تعریف‌های خم، خم ساده، خم بسته و خم ساده‌ی بسته، حروف الفبای فارسی را دسته‌بندی کنید.



شکل ۳۴

همه‌ی خم‌های ساده‌ی بسته دارای یک ویژگی مشترک هستند. آیا می‌توانید آن را کشف کنید؟

توجه کنید که این ویژگی هیچ ارتباطی به اندازه، شکل و همنهشتی آن‌ها ندارد. در واقع این ویژگی آن‌قدر بدیهی به‌نظر می‌رسد که ممکن است آن را نادیده گرفته باشید.

هر خم ساده‌ی بسته دارای درون و بیرون است. هر خم ساده‌ی بسته، مجموعه نقطه‌های صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کند، این زیرمجموعه‌ها شامل نقطه‌های درون، بیرون و روی خم هستند.[1]

قضیه خم جُردن

هر خم ساده‌ی بسته‌ی C ، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از **هم درون**، **بیرون** و روی **خم** تقسیم می‌کند.

چرا نمونه‌های (الف)، (ب) و (ت) خم ساده‌ی بسته نیستند؟ توضیح دهید. نمونه‌های (پ)، (ث)، (ج) و (چ)، خم‌های ساده‌ی بسته‌ای هستند که چندضلعی نامیده می‌شوند.

چندضلعی یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد به‌طوری که نقطه‌های انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آن‌ها روی یک خط قرار نگرفته باشند.

در شکل ۳۴ (ج)، پاره‌خط‌های AB ، BC ، CD، DE و EA ضلع‌های چندضلعی ABCDE و نقطه‌های A ، B ، C ، D و E رأس‌های چندضلعی خوانده می‌شوند. رأس‌های مجاور، نقطه‌های انتهایی یک ضلع هستند و قطرهای یک چندضلعی پاره‌خط‌هایی هستند که رأس‌های غیرمجاور را به‌هم وصل می‌کنند، مانند AD در شکل ۳۴ (چ).

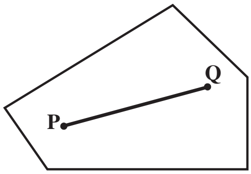
چندضلعی‌ها براساس تعداد ضلع‌هایشان نامگذاری می‌شوند. به عنوان مثال، یک چندضلعی با سه‌ضلع، سه‌ضلعی یا مثلث، با چهارضلع، چهارضلعی و با پنج‌ضلع، پنج‌ضلعی خوانده می‌شود.

۱ــ اگر چه این ویژگی واضح به نظر می‌رسد، ولی قضیه‌ی خم جردن دارای اثبات بسیار مشکلی است که در سطح ریاضی پیشرفته مطرح می‌شود زیرا به ابزار قوی‌تری از جمله توپولوژی جبری نیازمند است.

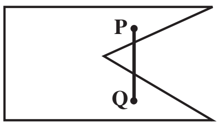
اجتماع نقاط یک خم ساده‌ی بسته با نقاط درون آن یک **ناحیه** نامیده می‌شود. ناحیه‌های یک صفحه در دو دسته‌ی **محدب** و **غیرمحدب** طبقه‌بندی می‌شوند.

یک ناحیه (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) **محدب** است، اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به‌هم وصل می‌کند، کاملاً در آن ناحیه قرار گیرد.

در غیراین‌صورت اگرحداقل دو نقطه در ناحیه وجود داشته باشند به‌طوری که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند کاملاً درون ناحیه قرار نگیرد، آن ناحیه غیرمحدب خوانده می‌شود. به‌عنوان مثال در شکل ۳۵، ناحیه‌ی محدود شده به خم بسته‌ی (الف) محدب و ناحیه‌ی محدود شده به خم بسته‌ی (ب) غیرمحدب است.



(الف)



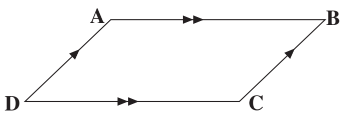
(ب)

شکل ۳۵

دایره نیز نمونه‌ای از یک خم ساده‌ی بسته است که درون آن یک ناحیه‌ی محدب می‌باشد.

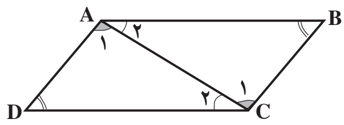
۱ــ۷ــ متوازی الاضلاع

متوازی الاضلاع یک چهارضلعی است که ضلع‌های آن دوبه‌دو باهم موازی هستند. از موازی بودن ضلع‌های روبه‌رو، مساوی بودن آن‌ها نیز نتیجه می‌شود. برای نشان دادن این خاصیّت، از استدلال استنتاجی کمک می‌گیریم. متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر بگیرید (شکل ۳۶).



شکل ۳۶

قطر AC ، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث ADC و ABC تقسیم می‌کند (شکل ۳۷).



شکل ۳۷

طبق قضیه‌ی خطوط موازی، در این دو مثلث داریم

$$\hat{A}_{۱} = \hat{C}_{۱} \quad , \quad \hat{A}_{۲} = \hat{C}_{۲}$$

ضلع AC نیز در هر دو مثلث مشترک است. پس دو مثلث ADC و ABC به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند. در نتیجه ضلع‌های نظیر برابر هستند. یعنی

$$AD = BC \quad , \quad AB = DC$$

همچنین در دو مثلث ABC و ADC زاویه‌های نظیر نیز برابر خواهند بود.

$$\hat{B} = \hat{D}$$

و چون $\hat{A}_{۱} = \hat{C}_{۱}$ و $\hat{A}_{۲} = \hat{C}_{۲}$ در نتیجه :

$$\hat{A}_{۱} + \hat{A}_{۲} = \hat{C}_{۱} + \hat{C}_{۲}$$

یعنی

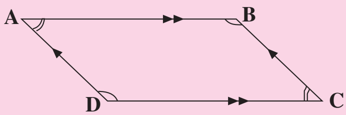
$$\hat{A} = \hat{C}$$

قضیه‌ی ۶:

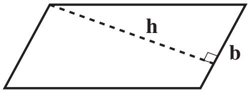
در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های موازی با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو نیز دوبه‌دو باهم مساوی هستند. یعنی در متوازی‌الاضلاع ABCD ،

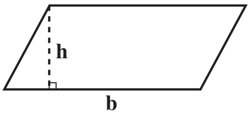
$$AD = BC \quad , \quad AB = DC$$

$$\hat{A} = \hat{C} \quad , \quad \hat{D} = \hat{B}$$



یادآوری: در هر متوازی‌الاضلاع، پاره‌خطی که از یک رأس بر ضلع روبه‌روی آن عمود می‌شود **ارتفاع** و ضلعی که ارتفاع بر آن عمود شده است، **قاعده‌ی** نظیر آن ارتفاع نامیده می‌شود.

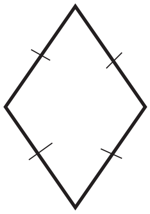




شکل ۳۸

ارتفاع را با h [۱] و قاعده را با b [۲] نمایش می‌دهند.

یادآوری: متوازی الاضلاعی که چهار ضلع مساوی داشته باشد لوزی خوانده می‌شود.



شکل ۳۹

تمرین ۱: به‌وسیله‌ی استدلال استنتاجی، یعنی با تکیه بر حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته بودیم، مساوی بودن ضلع‌های روبه‌روی هم در هر متوازی‌الاضلاع را نشان دادیم. آن حقایق کدام‌ها هستند؟

تمرین ۲: با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید که در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

تمرین ۳: نشان دهید که در هر مستطیل، قطرها باهم مساوی هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

تمرین ۴: نشان دهید که در هر لوزی، قطرها بر یکدیگر عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

۱ــ height　　　۲ــ base

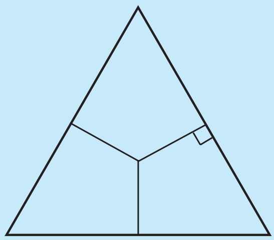
تحقیق

این مثلث متساوی‌الاضلاع به سه شکل همنهشت تقسیم شده است. نشان دهید که یک مثلث متساوی‌الاضلاع چگونه به

الف) ۲ مثلث همنهشت　　ب) ۳ مثلث همنهشت

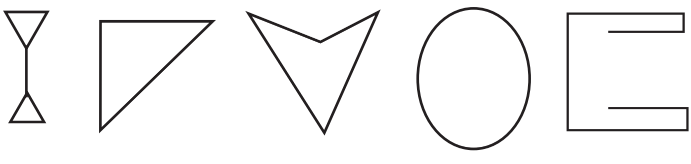
پ) ۴ مثلث همنهشت　　ت) ۶ مثلث همنهشت

تقسیم می‌شود.

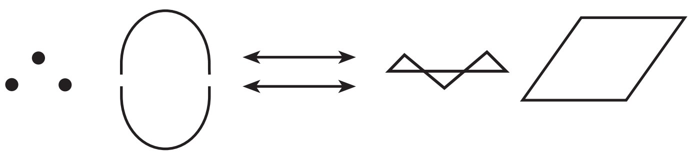


مسائل

۱. خم‌های مسطح را در شکل‌های زیر مشخص کنید. کدام‌یک از شکل‌ها خم ساده هستند؟ کدام‌یک از خم‌های ساده، بسته هستند؟

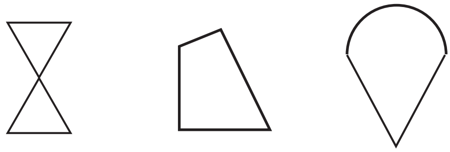


(الف)　(ب)　(پ)　(ت)　(ث)

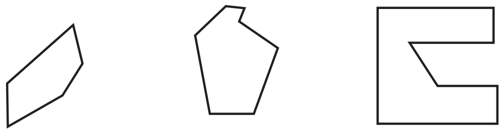


(ج)　(چ)　(ح)　(خ)　(د)

۲. کدام‌یک از شکل‌های زیر چندضلعی هستند؟ چندضلعی‌ها را از نظر محدب بودن دسته‌بندی کنید.



(الف)　　(ب)　　(پ)



(ت)　　(ث)　　(ج)

۳. الفبای انگلیسی را باحروف بزرگ نوشته، سپس آن‌ها را با توجه به تعریف‌های خم ساده، خم بسته، خم ساده‌ی بسته و چندضلعی دسته‌بندی کنید.

۴. با استفاده از چندپاره‌خط خمی رسم کنید که :

الف) ساده باشد اما بسته نباشد.　　ب) ساده و بسته باشد.

۵. هریک از چندضلعی‌های زیر چند قطر دارند؟

الف) مثلث　　ب) شش‌ضلعی　　پ) هشت‌ضلعی

۶. ثابت کنید :

الف) یک چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

پ) اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل دوبه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ت) اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

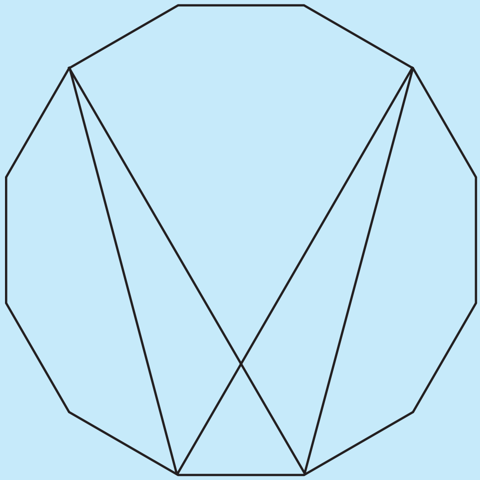
ث) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو دوبه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ج) هرگاه هر قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مجلهٔ ریاضی

ابوالوفابوزجانی ریاضیدان نامی ایرانی کتابی دربارهٔ معماهای ریاضی دارد معمّاهای این کتاب به صورت شکل‌هایی هستند که به قسمت‌های مختلف تقسیم شده‌اند و باید شکل‌ها بریده شوند و طوری کنار هم قرار بگیرند تا شکل جدیدی حاصل شود و معمّا حل گردد. معمّای زیر یکی از کارهای ابوالوفابوزجانی است.

به معمّای زیر نگاه کنید. این دوازده ضلعی منتظم به شش قسمت تقسیم شده است. آن قسمت‌ها را ببرید[1] و طوری آن‌ها را کنار هم بگذارید تا یک مربع تشکیل شود. دقّت کنید که یکی از قسمت‌ها یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.



قطعه‌های مربع تشکیل شده را به هم بچسبانید و ثابت کنید که شکل تشکیل شده در واقع یک مربع است.

۱ــ می‌توانید شکل را از روی کتاب به دفتر خود برگردان کنید.

فصل ۲

مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس

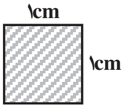


کشتزارهای شاهرود

۲ــ۱ــ مساحت

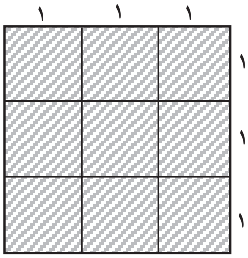
با انتخاب هر واحدی برای اندازه‌گیری طول یک پاره‌خط، واحدی نیز برای اندازه‌گیری مساحت به‌دست می‌آوریم که به کمک آن می‌توانیم مقدار سطح محدود شده در ناحیه‌ای از صفحه را اندازه بگیریم. برای مثال، اگر **سانتی متر** را برای اندازه‌گیری طول انتخاب کنیم واحد نظیر آن برای

اندازه‌گیری مساحت، **سانتی‌مترمربع** است که عبارت است از مساحت ناحیه‌ی محدود به مربعی به ضلع یک سانتی متر (شکل ۱).



شکل ۱: $1cm^2$ = مساحت

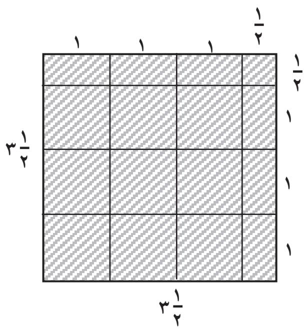
مربعی که طول ضلع آن یک واحد باشد (با هر واحد اندازه‌گیری طول)، **مربع واحد** نامیده می‌شود. برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌های مختلف در صفحه باید تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع‌های واحد که ناحیه را می‌پوشانند، پیدا کنیم. برای مثال، مساحت مربعی به ضلع ۳ سانتی متر، ۹ سانتی متر مربع است (شکل ۲)، زیرا با ۹ مربع واحد می‌توان سطح آن‌را پوشاند.



شکل ۲

فعالیت ۲ــ۱

۱. مربعی به ضلع $۳\frac{۱}{۲}$ سانتی‌متر را با ۹ مربعِ واحد، ۶ تا نیمه مربع و بالاخره مربع کوچکی به ضلع $\frac{۱}{۲}$ سانتی‌متر که مساحت آن یک چهارم مساحت مربع واحد است پوشانده‌ایم (شکل ۳).



شکل ۳

بنابراین مساحت این مربع برابر است با

$$۹+(۶\times\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۴}=۹+۳+\frac{۱}{۴}$$
$$=۱۲\frac{۱}{۴}cm^۲$$

۲. مربعی به ضلع $۴\frac{۱}{۴}$ سانتی متر رسم کنید. مساحت این مربع را با شمارش تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع واحد که برای پوشاندن آن لازم است به‌دست آورید، سپس حاصل‌ضرب $۴\frac{۱}{۴}\times۴\frac{۱}{۴}$ را پیدا و با آن مقایسه کنید.

۳. مستطیلی رسم کنید که اندازه‌ی ضلع‌های آن ۳ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر باشد. مساحت این مستطیل را با شمارش تعداد مربع‌های واحد که برای پوشاندن آن لازم است، تعیین کنید و با حاصل‌ضرب ۵×۳ مقایسه کنید.

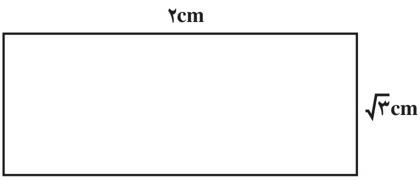
۴. مستطیلی به ضلع‌های $۶\frac{۱}{۴}$ سانتی‌متر و ۵ سانتی متر رسم کنید و با شمارش تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع واحد که برای پوشاندن آن لازم است، مساحت آن را به‌دست آورید. سپس نتیجه را با حاصل ضرب $۵\times۶\frac{۱}{۴}$ مقایسه کنید.

نتایجی را که از فعالیت ۲ــ ۱ به‌دست آورده‌ایم به‌صورت کلی خلاصه می کنیم :

مساحت مستطیلی به طول ضلع‌های a و b برابر است با :

a.b

توجّه: اندازه‌ی ضلع‌های مربع و مستطیل می‌توانند اعداد گنگ مثبت هم باشند.



شکل ۴

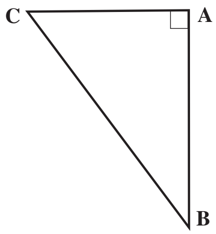
مثال ۱: در شکل ۴، اندازه ضلع‌های مستطیل ۲ و $\sqrt{۳}$ سانتی متر هستند.

بنابراین :

$$\text{مساحت مستطیل} = ۲\times\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}cm^۲$$

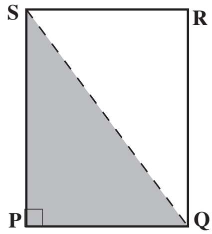
فعالیت ۲ـ۲

۱. مثلث ABC را که در رأس A قائمه است رسم کنید (شکل ۵).



شکل ۵

۲. مستطیل PQRS را طوری رسم کنید که طول و عرض آن به‌ترتیب برابر با AB و AC باشند. آنگاه قطر QS را رسم کنید (شکل ۶).



شکل ۶

۳. آیا مثلث‌های ABC، PQS و RSQ همنهشت هستند؟ جواب خود را با دلیل بیان کنید.

۴. از قسمت ۳ چه نتیجه‌ای در مورد مساحت این سه مثلث به دست می آورید؟

۵. طول مستطیل را ۵ و عرض آن را ۳ واحد طول بگیرید. مساحت این مستطیل چقدر است؟

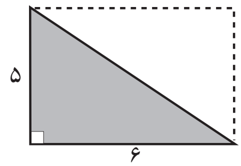
۶. با اندازه‌های فوق، مساحت مثلث‌های PQS، RSQ و ABC را به‌دست آورید.

۷. چه رابطه‌ای بین مساحت مثلث ABC و مساحت مستطیل PQRS وجود دارد؟

۸. اگر طول ضلع‌های زاویه‌های قائمه در مثلث شکل ۵، b و c واحد باشند، مساحت آن چگونه به‌دست می‌آید؟ توضیح دهید.

مثال ۲: با توجه به نتیجه‌ی فعالیت ۲ــ۲، مساحت مثلث قائم‌الزاویه در شکل ۷ برابر است با :

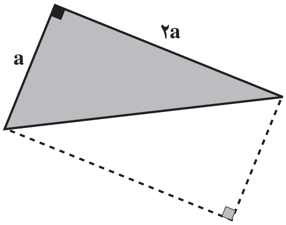
$$\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۶=۱۵cm^{۲}$$



شکل ۷

مثال ۳: مساحت مثلث قائم‌الزاویه در شکل ۸ برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}\times ۲a\times a=a^{۲}$$ واحد سطح



شکل ۸

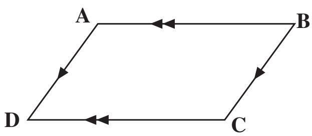
مساحت مثلث قائم‌الزاویه

مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه، یعنی اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه a و b باشد، آنگاه :

$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه}=\frac{۱}{۲}ab$$

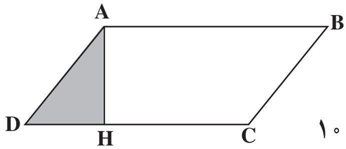
فعالیت ۲ــ۳

۱. روی یک قطعه مقوا، متوازی‌الاضلاع ABCD[۱] را رسم[۲] کنید.



شکل ۹

۲. ارتفاع AH وارد بر ضلع DC را رسم کنید تا مثلث AHD تشکیل گردد.

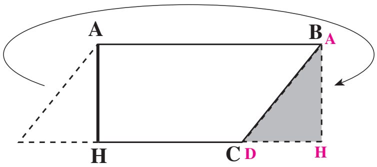


شکل ۱۰

۱ــ بهتر است متوازی‌الاضلاع‌های رسم شده متفاوت باشند.

۲ــ تکیه‌ی این فعالیت بر چگونگی رسم متوازی‌الاضلاع نیست.

۳. مثلث AHD را بریده و آن‌را طوری به سمت راست منتقل کنید که ضلع AD روی ضلع BCقرار بگیرد.



شکل ۱۱

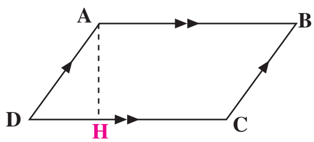
۴. به نظر شما چهارضلعی ABHH چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

۵. با توجه به مساحت ABHH، روشی برای پیدا کردن مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD پیدا کنید.

حال به کمک استدلال استنتاجی، رابطه‌ای را که در فعالیت قبل برای مساحت متوازی‌الاضلاع به‌دست آوردید، نشان می‌دهیم.

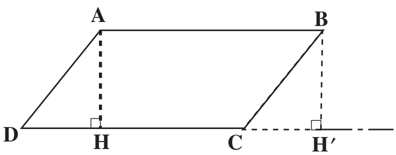
فعالیت ۲ــ۴

۱. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم و ارتفاع وارد بر ضلع DC را رسم می‌کنیم (شکل ۱۲).

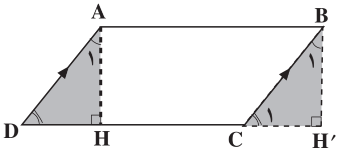


شکل ۱۲

۲ــ ضلع DC را امتداد می‌دهیم و از رأس B خطی بر امتداد آن عمود می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی H′ قطع کنند (شکل ۱۳).



شکل ۱۳



شکل ۱۴

۳. نشان دهید چهارضلعی ABH′H مستطیل است.

۴. در متوازی‌الاضلاع ABCD، ضلع‌های AD و BC موازی و مساوی هستند و به کمک قضیه‌ی خطوط موازی می‌توان نتیجه گرفت (چرا؟).

$$\hat{D} = \hat{C}_1$$

درنتیجه متمم‌های آن‌ها یعنی $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ نیز برابرند.

با ادامه‌ی این فعالیت می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد :

الف) دو مثلث AHD و BH′C به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند، پس :

مساحت مثلث BH′C = مساحت مثلث AHD

ب) مثلث AHD و ذوزنقه‌ی ABCH، متوازی‌الاضلاع ABCD را به دو قسمت مجزا[1] تقسیم کرده‌اند، پس :

مساحت ذوزنقه‌ی ABCH + مساحت مثلث AHD = مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

مقدار مساوی مساحت AHD را از (الف) جایگزین می‌کنیم.

مساحت ذوزنقه‌ی ABCH + مساحت مثلث BH′C = مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

پ) با دقت در شکل ۱۴، دیده می‌شود که ذوزنقه‌ی ABCH و مثلث BH′C ، مستطیل ABH′H را می سازند، درنتیجه

مساحت مستطیل ABH′H = مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

یا

$AB \times AH$ = مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

چون $AB = DC$ ، پس

$DC \times AH$ = مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

مساحت متوازی‌الاضلاع

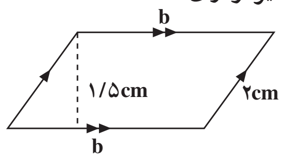
مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع نظیر آن است.

$b \times h$ = مساحت متوازی‌الاضلاع

۱ــ منظور از دو شکل مجزا آن است که مساحت اشتراک آن‌ها صفر باشد.

مثال ۴: محیط متوازی الاضلاعی ۱۶ سانتی‌متر، یک ضلع آن ۲ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر ۱/۵ سانتی‌متر است. مساحت متوازی الاضلاع را حساب کنید.

حل: چون در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌ها دو به دو با هم مساوی هستند، پس محیط آن برابر است با دو برابر مجموع دو ضلع غیرموازی،



شکل ۱۵

یعنی :

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع} = ۲(۲+b) = ۱۶$$

$$۲+b=۸$$

$$b=۸-۲$$

پس $b=۶$. درنتیجه :

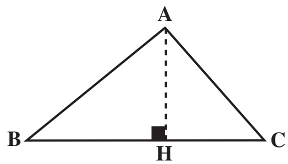
$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$=۶\times ۱/۵$$

$$=۹cm^۲$$

می‌توان مساحت مثلث را با استفاده از مساحت متوازی‌الاضلاع، به‌دست آورد.

مثلث ABC (شکل ۱۶) را در نظر بگیرید.

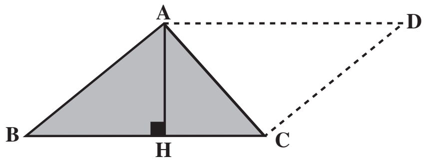


شکل ۱۶

پاره‌خط AH که از رأس A بر ضلع BC عمود شده است، **ارتفاع** مثلث و ضلع BC **قاعده‌ی** نظیر این ارتفاع نامیده می‌شود. هریک از ضلع‌های مثلث را می‌توان به عنوان قاعده درنظر گرفت و ارتفاع نظیر آن را رسم نمود.

تمرین: مثلثی با یک زاویه‌ی قائمه و مثلث دیگری با یک زاویه‌ی منفرجه رسم کرده، سپس سه ارتفاع هریک از آن‌ها را رسم کنید.

در مثلث ABC (شکل ۱۷) از رأس A پاره‌خط AD را موازی BC رسم می‌کنیم طوری که AD = BC . آنگاه نقطه‌ی D را به C وصل می‌کنیم. به این ترتیب متوازی‌الاضلاع ABCD با ارتفاع AH و قاعده‌ی BC به‌دست می‌آید.



شکل ۱۷

(۱) $\qquad$ مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD $= BC \times AH$

از طرف دیگر، دو مثلث ABC و ACD که متوازی‌الاضلاع ABCD را تشکیل می‌دهند، به‌حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند، پس مساحت‌های آن‌ها با هم برابر است. درنتیجه

مساحت مثلث ADC + مساحت مثلث ABC = مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

(۲) $\qquad$ مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD = ۲(مساحت مثلث ABC)

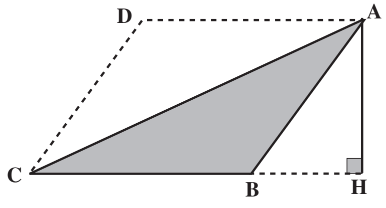
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$BC \times AH =$ ۲(مساحت مثلث ABC)

یا

مساحت مثلث ABC $= \frac{۱}{۲}(BC \times AH)$

در شکل ۱۷، ارتفاع نظیر BC داخل مثلث قرار گرفته بود. اگر این ارتفاع مانند شکل ۱۸ در خارج مثلث یعنی بر امتداد قاعده‌ی BC عمود شود، همان استدلال بالا را می‌توان برای به‌دست آوردن مساحت آن به‌کار برد.



شکل ۱۸

برای این کار، از رأس A، پاره‌خط AD را مساوی و موازی با BC رسم می‌کنیم. سپس نقطه‌ی D را به C متصل می کنیم. مساحت متوازی الاضلاع ABCD برابر است با

$$AH \times BC$$

از طرفی، دومثلث ABC و ACD به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند. پس مساحت‌های آنها با هم برابر است :

مساحت مثلث ADC + مساحت مثلث ABC = مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

= ۲(مساحت مثلث ABC)

بنابراین

مساحت مثلث ABC $= \frac{۱}{۲}(AH \times BC)$

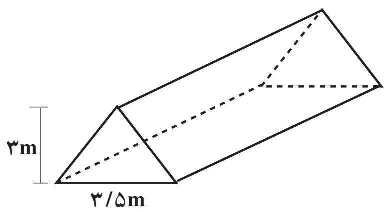
اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، متوازی الاضلاعی که همانند بالا روی آن ساخته می‌شود در واقع یک مستطیل است که ارتفاع و قاعده‌ی آن همان دو ضلع زاویه‌ی قائمه در مثلث هستند، پس به‌طور کلی

مساحت مثلث

مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیر آن، یعنی اگر اندازه‌ی ارتفاع h و اندازه قاعده‌ی نظیر آن b باشد

مساحت مثلث $= \frac{۱}{۲}bh$

مثال ۵: به شکل ۱۹ نگاه کنید. این نمایی از یک چادر صحرایی است. می‌بینید که قسمت جلوی چادر به شکل مثلثی به ارتفاع ۳ متر و قاعده‌ی ۳/۵ متر است. برای پوشاندن جلوی این چادر چند مترمربع پارچه لازم است؟



شکل ۱۹

حل: چون مساحت مثلث جلوی چادر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times ۳\times(۳/۵)=\frac{۱۰/۵}{۲}=۵/۲۵m^{۲}$$

پس۵/۲۵ مترمربع پارچه لازم است.

مثال ۶: اگر مساحت مثلثی ۵ سانتی مترمربع و قاعده‌ی آن ۳ سانتی‌متر باشد، ارتفاع آن چقدر است؟

حل: چون

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}\,(\text{ارتفاع} \times \text{قاعده})$$

$$=\frac{۱}{۲}bh$$

در رابطه‌ی فوق با داشتن مقدارهای معلوم مساحت و قاعده، مقدار ارتفاع را که مجهول است، پیدا می‌کنیم :

$$۵=\frac{۱}{۲}\times ۳\times h=\frac{۳h}{۲}$$

درنتیجه :

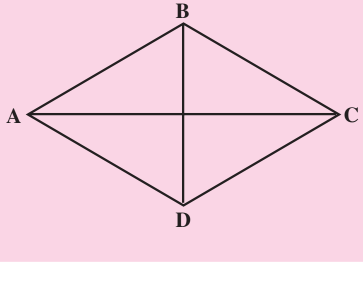
$$h=\frac{۲\times ۵}{۳}=\frac{۱۰}{۳}cm$$

توجّه: با استفاده از **مساحت مثلث**، می‌توان مساحت لوزی را به‌دست آورد :

مساحت لوزی

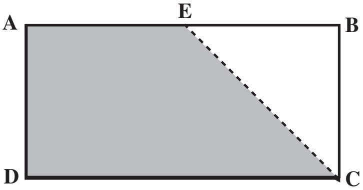
مساحت هر لوزی برابر با نصف حاصل ضرب قطرهای آن است.

$$\text{مساحت لوزی } ABCD = \frac{۱}{۲}(AC\times BD)$$



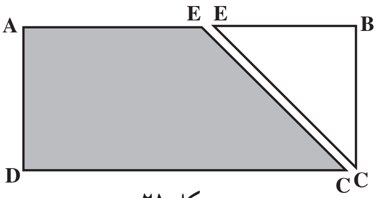
تمرین: نشان دهید مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل ضرب قطرهای آن.

فعالیت ۲ــ۵



شکل ۲۰

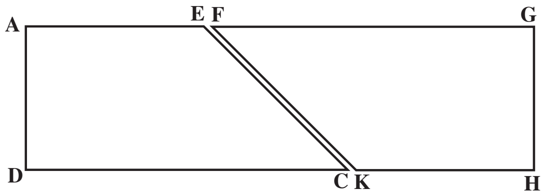
۱. مقوای مستطیل شکل ABCD را تهیه کنید. نقطه‌ی E را روی ضلع AB انتخاب و از آن به رأس C وصل کنید (شکل ۲۰).



شکل ۲۱

۲. مقوا را در امتداد پاره‌خط CE ببرید. دو شکل به‌دست می‌آید. یکی مثلث EBC و دیگری چهارضلعی AECD که یک **ذوزنقه** است (شکل ۲۱).

۳. با یک تکه مقوا، ذوزنقه‌ی FGHK را همنهشت با AECD ببرید. سپس دو ذوزنقه را مانند شکل ۲۲ کنار هم بگذارید تا مستطیل AGHD تشکیل شود.



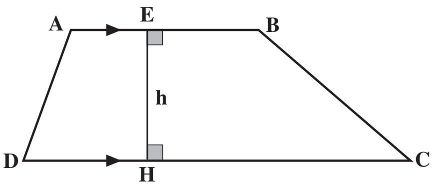
شکل ۲۲

۴. مساحت مستطیل AGHD را به‌دست آورید.

۵. به کمک نتیجه‌ی قسمت ۴، مساحت ذوزنقه AECD را بیابید.

ذوزنقه یک چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.

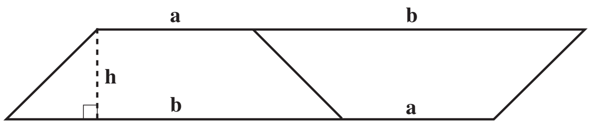
دو ضلع موازی در یک ذوزنقه، **قاعده‌های** ذوزنقه و پاره‌خطی که بر هر دو قاعده عمود است، **ارتفاع** ذوزنقه نامیده می‌شود (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

فعالیت ۲ـ۶

۱. یک تکه مقوا به شکل ذوزنقه تهیه کنید. طول قاعده‌ی کوچک را a، طول قاعده‌ی بزرگ راb و طول ارتفاع را h بنامید (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

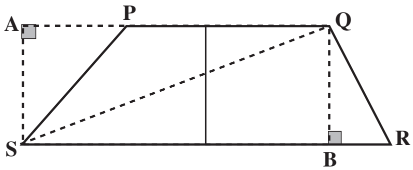
۲. ذوزنقه‌ی دیگری همنهشت با ذوزنقه‌ی بریده شده تهیه کنید و مانند شکل آن‌ها را کنار هم بگذارید. نشان دهید شکل حاصل متوازی الاضلاع است.

۳. مساحت متوازی‌الاضلاع به‌دست آمده را پیدا کنید.

۴. مساحت ذوزنقه را از روی مساحت متوازی‌الاضلاع حساب کنید.

فعالیت ۲ـ۷

۱. در ذوزنقه‌ی شکل ۲۵، قاعده‌ی PQ را امتداد دهید. سپس از رأس S بر آن عمودی رسم کنید تا آن‌را در نقطه‌ی A قطع کند. پاره‌خط SA ارتفاع نظیر قاعده‌ی PQ است. سپس ارتفاع QB را رسم کرده و دو رأس مقابل Q و S را به هم وصل کنید تا قطر QS به‌دست آید.



شکل ۲۵

۲. طول قاعده‌ی کوچک را a، طول قاعده‌ی بزرگ را b و ارتفاع $QB = SA$ را h بگیرید ؛

۳. با توجه به اینکه طول QB برابر h و طول SR برابر b است، مساحت مثلث QRS را پیدا کنید ؛

۴. با توجه به اینکه طول SA، برابر h و طول PQ برابر a است، مساحت مثلث PQS را به‌دست آورید ؛

۵. مساحت ذوزنقه‌ی PQRS را بر حسب a، b و h حساب کنید.

مساحت ذوزنقه

مساحت ذوزنقه برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضرب در ارتفاع، یعنی مساحت ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های a و b و ارتفاع h برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(a+b)h$$

مثال ۷: مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های ۸cm و ۱۰cm و ارتفاع ۶cm برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(۸+۱۰)\times ۶ = ۵۴cm^{۲}$$

مجله‌ی ریاضی

برای به‌دست آوردن مساحت، از **چهار اصل مساحت** استفاده کردیم :

اصل ۱ : مساحت هر شکلی در صفحه، یک عدد حقیقی مثبت است.

اصل ۲ : اگر یک شکل از بخش های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر با مجموع مساحت‌های آن بخش‌ها است.

اصل ۳ : مساحت شکل‌های همنهشت مساوی هستند.

اصل ۴ : مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول در عرض آن است.

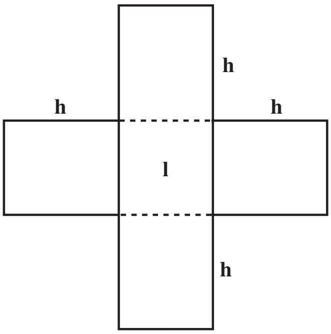
مسائل[1]

۱. ارتفاع مثلثی h و قاعده‌ی آن ۲h است. مساحت مثلث را بر حسب h پیدا کنید.

۲. ارتفاع مثلثی نصف قاعده‌ی آن است. اگر مساحت مثلث ۳۶ مترمربع باشد، طول قاعده‌ی آن را پیدا کنید.

۱ــ اگر واحد اندازه‌گیری ذکر نشده باشد، شما می‌توانید واحد دلخواه اختیار کنید.

۳. مساحت مستطیلی ۱۴۴۰ سانتی مترمربع و طول آن ۵ برابر عرض آن است. طول و عرض مستطیل را حساب کنید.

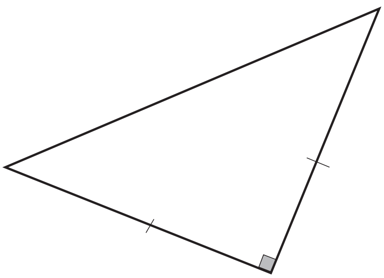


۴. اگر مقوای نشان داده شده در شکل روبه‌رو را از محل‌های نقطه‌چین تا کنیم، یک جعبه‌ی درباز درست می‌شود.

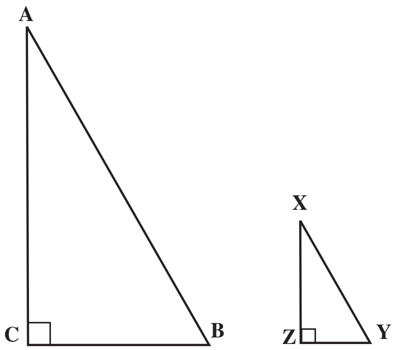
الف) اگر l = ۴cm و h = ۵cm ، برای ساخت جعبه چه مقدار مقوا (برحسب سانتی‌مترمربع) لازم است؟

ب) مساحت مقوا را در حالت کلی بر حسب l و h پیدا کنید.

۵. اگر ارتفاع مثلثی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ باشد، قاعده‌ی آن‌را حساب کنید.



۶. مساحت مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی ۴۰ است. اندازه‌ی هرکدام از ساق‌ها را پیدا کنید (شکل روبرو).



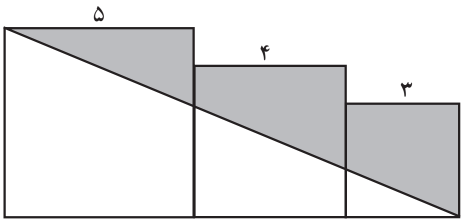
۷. در شکل روبه‌رو، اندازه ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث ABC دو برابر اندازه‌ی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث XYZ است :

نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث XYZ چقدر است؟

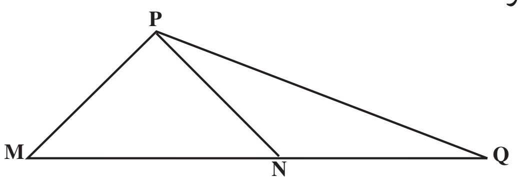
(**راهنمایی:** اگر XZ = a و YZ = b ، آنگاه اندازه‌های AC و BC، به ترتیب ۲a و ۲b خواهد بود.)

۸. مسأله‌ی قبل را برای حالتی که اندازه‌ی ضلع‌های مثلث ABC، n برابرِ طول اضلاع مثلث XYZ باشد حل کنید (n عدد طبیعی است).

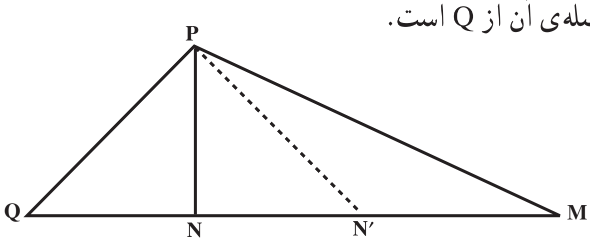
۹. در شکل زیر، سه مربع به ضلع‌های ۴،۵ و ۳ در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده چقدر است؟



۱۰. در مثلث PQM، نقطه‌ی N وسط ضلع QM است. نشان دهید مساحت‌های دو مثلث PNQ و PMN برابرند.



۱۱. در شکل زیر، نقطه‌ی N روی پاره‌خط QM چنان انتخاب شده است که فاصله‌ی آن از M دو برابر فاصله‌ی آن از Q است.

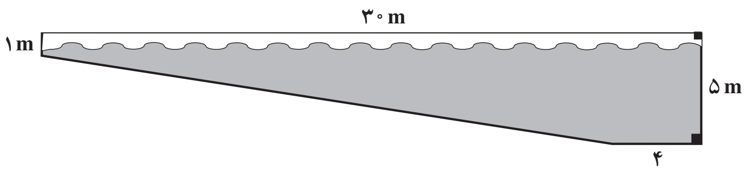


الف) ثابت کنید مساحت PNM دو برابر مساحت PQN است.

ب) اگر N′ وسط NM باشد، مساحت‌های PN′M و PQN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) چه رابطه‌ای بین مساحت PNN′ و مساحت PQM وجود دارد؟

۱۲. طول یک استخر شنا ۳۰ متر و گودی آن در قسمت کم عمق یک متر است. عمق استخر تا ۵ متر زیاد می‌شود. مساحت دیوار کناری این استخر را به‌دست آورید.



۱۳. ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، مساحت چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی قطرها خواهد بود.

۱۴. می‌خواهیم کف یک استخر شنا به شکل مستطیل و با طول ۹ متر و عرض ۶ متر را با کاشی‌های مربع شکلی به ضلع ۰/۵ متر بپوشانیم. اگر قیمت هر کاشی ۳۵۰ تومان باشد، هزینه‌ی این کار چقدر خواهد بود؟

۱۵. اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نشان دهید که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها است.

۱۶. اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، ثابت کنید که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌ها است.

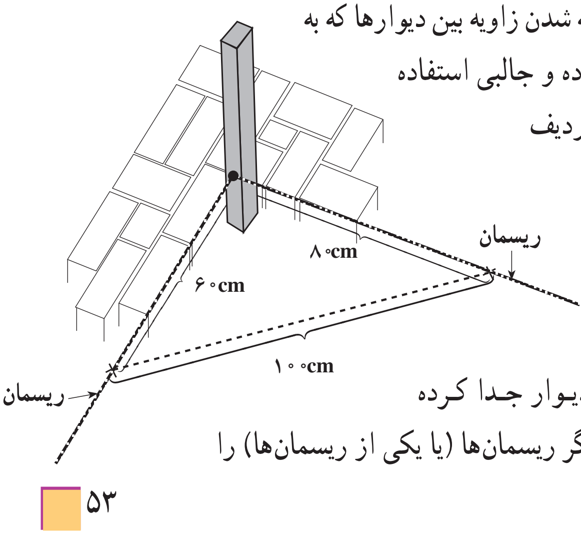
۱۷. نتیجه‌گیری‌های الف، ب و پ بعد از فعالیت ۲ــ۴ بر پایه کدام‌یک از اصل‌های بیان شده در مجله ریاضی صفحه ۴۵ است.

۲ــ۲ــ قضیه‌ی فیثاغورس

در اکثر مناطق کشورمان آجر، بلوک‌های سیمانی، سنگ و سیمان و گاهی خِشت از جمله مصالح اصلی خانه‌سازی و ساختمان‌ها هستند. یکی از موارد مهم در ساختن خانه‌ها و ساختمان‌ها، قائمه بودن زاویه‌ی بین دیوارها و یا گوشه‌های اتاق‌ها و اسکلت‌بندی ساختمان است، همانگونه که در ضرب‌المثل‌ها آمده است :

خِشت اول چون نهَد معمار کج　　　تا ثـریـا مـی‌رود دیـوار کـج

معمولاً بنّاهای ماهر و با تجربه برای قائمه شدن زاویه بین دیوارها که به آن « گونیا کردن» می‌گویند، از روش بسیار ساده و جالبی استفاده می‌کنند. به این صورت که پس از چیدن اولین ردیف گوشه بین دو دیوار، روی لبه اولین ردیف و در امتداد دیوارها ریسمان‌کشی می‌کنند. (شکل روبه‌رو) و سپس به‌وسیله متر روی یک ریسمان ۸۰ سانتی‌متر و روی ریسمان دیگر به اندازه ۶۰ سانتی‌متر از گوشه دو دیوار جدا کرده علامت‌گذاری می‌کنند. سپس آنقدر دو سرِ دیگر ریسمان‌ها (یا یکی از ریسمان‌ها) را



تغییر می‌دهند تا فاصله بین دو محل علامت‌گذاری شده دقیقاً به اندازه‌ی ۱۰۰ سانتی‌متر شود. در این وضعیت طرفِ دیگر ریسمان‌ها را ثابت کرده و شروع به آجرچینی در امتداد ریسمان‌ها می‌کنند. پس از چند ردیف دیوارچینی، قائمه بودن زاویه‌ی بین دو دیوار کاملاً مشهود خواهد بود. سؤالی که مطرح می‌گردد این است که آیا این روش، مبنای ریاضی دارد؟

فعالیت ۲ــ۸

۱. با استفاده از خط‌کش، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن ۸ سانتی‌متر و ۱۵ سانتی‌متر باشند. برای اطمینان از آنکه زاویه‌ی رسم شده دقیقاً 90° است، می‌توانید از یک نقاله و یا گوشه‌ی راست یک مقوا استفاده کنید.

۲. طول وتر مثلثی را که رسم کرده‌اید، با دقت به وسیله‌ی خط‌کش اندازه بگیرید.

۳. مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری رسم کنید که طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر باشد.

۴. طول وتر این مثلث را نیز دقیقاً اندازه بگیرید.

۵. در قسمت ۲، طول وتر چقدر بود؟ در قسمت ۴ چقدر است؟

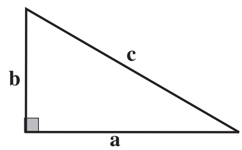
۶. باتوجه به نتیجه‌ی قسمت ۵، چه رابطه‌ای بین طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه و طول وتر در مثلث فوق وجود دارد؟

مجله‌ی ریاضی

فیثاغورس ریاضیدان و فیلسوف یونان باستان بود که ۵۳۰ سال قبل از میلاد می‌زیست و رهبر گروهی از فلاسفه بود که بیش از ۱۰۰ سال در اوج شهرت بودند. این گروه، علاوه‌بر ریاضیات به موسیقی، اخلاق و مذهب نیز می‌پرداختند. آن‌ها کشفیات زیادی در ریاضیات انجام دادند که مطابق آیین خود همه را به فیثاغورس نسبت می‌دادند، از جمله ثابت کردند که مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است. قضیه فیثاغورس را به جرأت می‌توان معروفترین قضیه هندسه نامید که تا حال بیش از ۳۷۰ اثبات برای آن ارائه شده است.

فعالیت ۲ـ۹

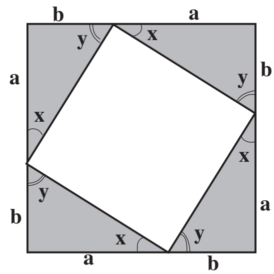
۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a، b و c را روی یک تکه مقوا ببرید ؛



شکل ۲۶

۲. سه مثلث همنهشت با این مثلث را با مقوا تهیه کنید.

۳. مطابق شکل ۲۷، چهار مثلث را طوری کنار هم بگذارید تا مربعی به طول ضلع $a+b$ تشکیل شود.



شکل ۲۷

۴. در شکل ۲۷، چرا زاویه‌هایی که با x نامگذاری شده‌اند، با هم و زاویه‌هایی که با y نامگذاری شده‌اند با هم برابرند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۵. به کمک قضیه مجموع زاویه‌های مثلث، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی چهارضلعی تشکیل شده در وسط را بیابید.

۶. از قسمت‌های ۴ و ۵ چه نتیجه‌ای درباره‌ی چهارضلعی وسط به‌دست می‌آورید؟

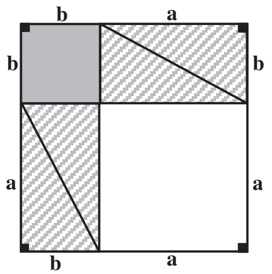
۷. مربعی به طول ضلع c یعنی طول وتر این مثلث قائم‌الزاویه با مقوایی از رنگ متفاوت تهیه کنید.

۸. چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی همنهشت به ضلع‌های a ، b و c و مربعی به ضلع c، مربع بزرگتر به ضلع $a+b$ را درست کرده‌اند. درنتیجه :

(۱) مساحت مربع به ضلع c + مساحت چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی همنهشت = مساحت مربع‌بزرگتر

۹. مجدداً با مقوا، چهار مثلث همنهشت با مثلث قائم‌الزاویه‌ی به طول ضلع‌های a و b و c و دومربع به‌طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه این مثلث یعنی a و b تهیّه کنید.

۱۰. این چهار مثلث و دو مربع را مانند شکل ۲۸ طوری کنار هم قرار دهید تا مربع بزرگتر به طول ضلع $a+b$ ساخته شود.

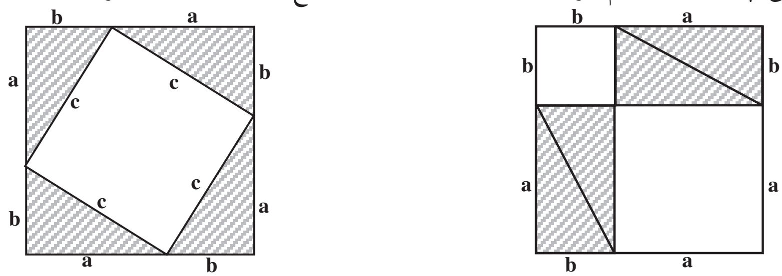


شکل ۲۸

۱۱. شکل ۲۸، از ۶ قسمت مجزّا تشکیل شده است، درنتیجه مساحت آن برابر مجموع مساحت‌های این ۶ قسمت می‌شود.

(۲) مساحت دومربع به طول ضلع‌های a و b + مساحت ۴ مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت = مساحت مربع بزرگتر

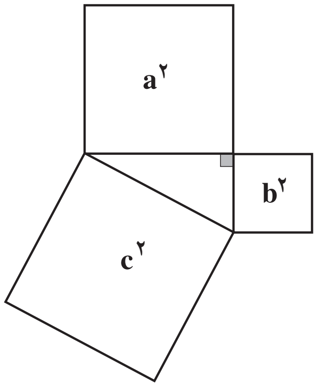
۱۲. از دو مربع همنهشت به طول ضلع $a+b$ در شکل‌های ۲۷ و ۲۸، قسمت‌های مساوی آن‌ها یعنی چهار مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت به طول ضلع‌های a، b و c را بردارید.



شکل ۲۹

آنچه از شکل ۲۷ باقی می‌ماند مربعی است که روی وتر مثلث قائم الزاویه به ضلع‌های a، b و c ساخته شده است و مساحت آن c^2 است. از شکل ۲۸ هم دو مربعی باقی می‌ماند که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه از همین مثلث ساخته شده است که مساحت‌های آن‌ها به ترتیب a^2 و b^2 است. یعنی مساحت باقی مانده از شکل ۲۷ برابر مساحت باقی مانده از شکل ۲۸ است :

$$c^2 = a^2 + b^2$$



شکل ۳۰

این نتیجه را مستقیماً از رابطه‌ی (۱) و به کمک عبارت‌های جبری نیز می‌توان به‌دست آورد.
طول ضلع مربع بزرگتر $a+b$ ، طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه مثلث‌های همنهشت a، b و طول وتر c است. حال رابطه‌ی (۱) را دوباره‌نویسی می‌کنیم :

$$(a+b)^۲ = ۴\times\frac{۱}{۲}ab+c^۲$$

از طرفی

$$(a+b)^۲ = a^۲+۲ab+b^۲$$

درنتیجه :

$$a^۲+۲ab+b^۲ = ۲ab+c^۲$$

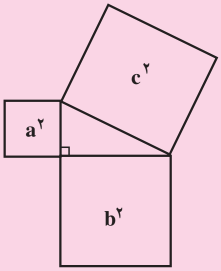
با حذف ۲ab از دو طرف رابطه‌ی فوق

$$a^۲+b^۲ = c^۲$$

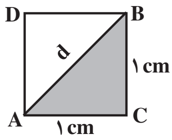
قضیه‌ی فیثاغورس

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مربعی که روی وتر ساخته می‌شود، برابر مجموع مساحت‌های دو مربعی است که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی آن ساخته می‌شود.

$$c^۲ = a^۲+b^۲$$



مثال ۸: طول قطر مربعی به ضلع یک سانتی‌متر را پیدا کنید.



شکل۳۱

حل: اگر طول قطر d سانتی‌متر باشد، طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ABC

$$d^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲$$

پس $d = \sqrt{۲}cm$.

مثال ۹: طول قطر مستطیلی به ضلع‌های ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر را پیدا کنید.

حل: طبق قضیه‌ی فیثاغورس، اگر طول قطر را d بنامیم

$$d^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵$$

درنتیجه d برابر ۵ سانتی‌متر است.

مثال ۱۰: طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه ۶ واحد و ۷ واحد است.

الف) طول وتر این مثلث را پیدا کنید.

ب) اگر طول ضلع‌های زاویه قائمه این مثلث ۲ برابر شود، طول وتر آن چه تغییری می‌کند؟

پ) اگر طول ضلع‌های این مثلث r برابر شود ($r > ۰$)، طول وتر چه تغییری می‌کند؟

حل: الف) اگر طول وتر مثلث قائم‌الزاویه را d بنامیم، طبق قضیه‌ی فیثاغورس

$$d^۲ = ۶^۲ + ۷^۲$$

$$d = \sqrt{۶^۲ + ۷^۲} = \sqrt{۳۶ + ۴۹} = \sqrt{۸۵}$$ واحد

ب) این بار طول ضلع‌های قائمه دو برابر شده است پس طول وتر

$$d = \sqrt{(۲ \times ۶)^۲ + (۲ \times ۷)^۲}$$

$$= \sqrt{۲^۲(۶^۲ + ۷^۲)}$$

$$= ۲\sqrt{۶^۲ + ۷^۲} = ۲\sqrt{۸۵}$$ واحد

است، یعنی طول وتر نیز ۲ برابر می‌شود.

پ) در حالت کلّی، اگر ضلع‌های زاویه‌ی قائمه ۶r و ۷r باشد، پس طول وتر

$$d = \sqrt{(۶r)^۲ + (۷r)^۲} = \sqrt{r^۲(۶^۲ + ۷^۲)}$$
$$= r\sqrt{۸۵} \text{ واحد}$$

است، یعنی طول وتر نیز r برابر می‌شود.

مثال ۱۱ : نسبت طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳ به ۵ است. اگر مساحت مثلث ۱۶ واحد مربع باشد، طول وتر چقدر خواهد بود؟

حل: اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در این مثلث a و b باشد، آنگاه $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۵}$. یعنی $۳b = ۵a$ یا $b = \frac{۵}{۳}a$.

چون مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی دو ضلع زاویه‌ی قائمه آن است،

$$۱۶ = \frac{۱}{۲} \times a \times b = \frac{۱}{۲} \times a \times \frac{۵}{۳} a = \frac{۵}{۶} a^۲$$

درنتیجه :

$$a^۲ = \frac{۶ \times ۱۶}{۵} \qquad (۱)$$

از اینجا می‌توانیم طول وتر را به کمک قضیه‌ی فیثاغورس بیابیم. اگر وتر c باشد

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

چون $b = \frac{۵}{۳}a$ ، پس $b^۲ = \frac{۲۵}{۹}a^۲$ ، درنتیجه :

$$c^۲ = a^۲ + \frac{۲۵}{۹}a^۲ = (۱ + \frac{۲۵}{۹})a^۲$$
$$= \frac{۳۴}{۹}a^۲$$

با جایگزین کردن مقدار $a^۲$ از (۱) در تساوی اخیر، به‌دست می‌آوریم

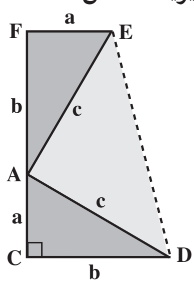
$$c^۲ = \frac{۳۴}{۹} \times \frac{۶ \times ۱۶}{۵} = \frac{۳۴ \times ۳۲}{۱۵}$$

و سرانجام

$$c = \sqrt{\frac{۳۴ \times ۳۲}{۱۵}}$$

فعالیت ۲ــ۱۰

ذوزنقه‌ی FEDC را درنظر بگیرید (شکل ۳۲).



شکل ۳۲

۱. مساحت ذوزنقه را بر حسب a و b به‌دست آورید.

۲. نشان دهید مثلث ADE قائم الزاویه است.

۳. مساحت مثلث‌های ACD و AEF را پیدا کنید.

۴. مساحت ذوزنقه را برحسب مجموع مساحت‌های مثلث‌های AEF، ACD و ADE به‌دست آورید.

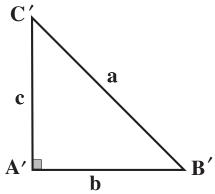
۵. با استفاده از ۱ و ۴، قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کنید.

طبق قضیه‌ی فیثاغورس، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه است. یعنی اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه b ، c و طول وتر a باشد، آنگاه

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (۱)$$

آیا عکس این مطلب نیز درست است؟ یعنی آیا اگر در مثلثی با طول ضلع‌های a،b و c، رابطه‌ی (۱) برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که آن مثلث قائم‌الزاویه است؟

فرض کنید رابطه‌ی (۱) برای مثلث ABC به طول ضلع‌های a،b و c برقرار باشد. مثلث قائم‌الزاویه‌ی A′B′C′ را به طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه b و c رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است زاویه‌ی قائمه‌ای به رأس A′ رسم کنیم، سپس روی ضلع‌های این زاویه پاره‌خط‌هایی به طول‌های b و c جدا می‌کنیم و انتهای پاره‌خط‌ها را به ترتیب B′ و C′ می‌نامیم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

حال C' را به B' وصل می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ به‌دست آید. چون این مثلث قائم‌الزاویه است. بنابر قضیه‌ی فیثاغورس

$$B'C'^2 = b^2 + c^2$$

و با توجه به رابطه (۱)

$$B'C'^2 = a^2$$

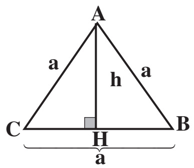
یعنی $B'C' = a$. پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند. درنتیجه زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های مساوی، با هم برابرند. چون $\hat{A}' = 90°$ پس $\hat{A} = 90°$. به این ترتیب، عکس قضیه‌ی فیثاغورس ثابت می‌شود.

عکس قضیه‌ی فیثاغورس

اگر در مثلث ABC، $AB = c$ ، $AC = b$ ، $BC = a$ و $a^2 = b^2 + c^2$ ، آنگاه مثلث ABC در رأس Aقائمه است.

مثال ۱۲: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a را حساب کنید.

حل: ارتفاع وارد بر ضلع BC (یا یکی از دو ضلع دیگر) را رسم می‌کنیم :



شکل ۳۴

چون در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع وارد بر هر ضلع میانه وارد بر آن ضلع نیز می‌باشد، پس

$$BH = HC = \frac{1}{2}a$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHC،

$$AH^2 = AC^2 - HC^2$$

مقدارهای $AC=a$ و $HC=\frac{۱}{۲}a$ را در رابطه‌ی فوق جایگزین می‌کنیم تا طول ارتفاع $AH=h$ را برحسب a به‌دست آوریم :

$$h^{۲}=a^{۲}-\frac{۱}{۴}a^{۲}$$
$$=\frac{۳}{۴}a^{۲}$$

پس

$$\boxed{h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}$$

با دانستن مقدار ارتفاع و قاعده، مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم :

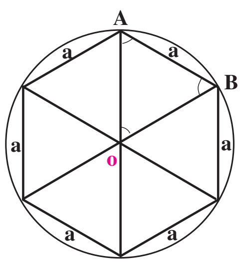
$$\text{ABC مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\times AH\times BC$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times a$$
$$=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

در نتیجه :

مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است.

مثال ۱۳: مساحت یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع a را پیدا کنید.

حل: مرکز دایره را به رئوس شش‌ضلعی منتظم وصل می‌کنیم، شش مثلث پدید می‌آید :



چون مجموع زاویه‌های مرکزی 360° است و هرکدام از زاویه‌های مرکزی روبه‌روی وترهای مساوی هستند، پس هر شش زاویه‌ی مرکزی با هم مساوی و هرکدام برابر $60^\circ = 6 \div 360^\circ$ می‌باشد، (چرا؟) همچنین، شش مثلث فوق متساوی‌الساقین هستند زیرا دو ضلع هرکدام در واقع شعاع‌های دایره می‌باشند. درنتیجه دو زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع‌ها با هم برابرند. از طرفی، زاویه‌ی سوّم هر یک از این مثلث‌ها زاویه‌ی مرکزی و 60° است و مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث نیز 180° است. پس

مجموع دو زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع $= 180^\circ - 60^\circ$

$= 120^\circ$

و چون این دو زاویه با هم برابرند،

هر زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع $= \frac{120}{2}$

$= 60^\circ$

بنابراین هر سه زاویه‌ی هریک از مثلث‌ها مساوی 60° است. پس نتیجه می‌گیریم که مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع هستند و چون طول ضلع همه‌ی آن‌ها برابر a است پس این مثلث‌ها همنهشت هم می‌باشند. بنابراین،

مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a $= 6 \times$ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a $= \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

مسائل

۱. طول قطر مربعی را به‌دست آورید که طول ضلع آن برابر است با :

الف) $3cm$ ؛

ب) $5cm$ ؛

پ) a سانتی متر.

۲. طول قطر مستطیلی را به‌دست آورید که طول ضلع‌های آن برابر است با :

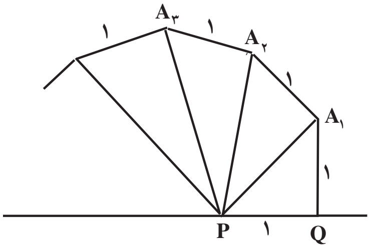
الف) ۳ و ۵ — ب) ۴ و ۷

پ) $3r$ و $5r$ — ت) $4r$ و $7r$

۳. مساحت مربعی ۱۴۴ سانتی‌متر مربع است. طول قطر این مربع چقدر است؟

۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول یک ضلع زاویه قائمه دو برابر طول ضلع دیگر است. اگر مساحت مثلث ۷۲ سانتی‌متر مربع باشد، طول وتر مثلث چقدر است؟

۵. در شکل روبرو، طول هریک از اضلاع زاویه قائمه در مثلث PQA_1، برابر ۱ سانتی‌متر است.



الف) طول وتر PA_1 چقدر است؟

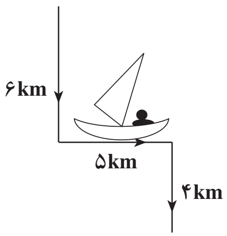
پاره خط A_1A_2 نیز به طول ۱ سانتی‌متر و بر PA_1 عمود است. طول پاره‌خط A_2A_3 نیز ۱ سانتی‌متر است و بر PA_2 عمود است، ...

ب) طول پاره خط PA_2 چقدر است؟

پ) طول پاره‌خط PA_3 چقدر است؟

طول n-امین پاره‌خط یعنی PA_n چقدر است؟

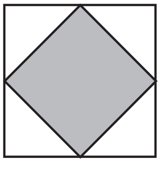
۶. یک قایق از نقطه‌ی شروع حرکت، ۶ کیلومتر به سمت جنوب، ۵ کیلومتر به سمت شرق و مجدداً ۴ کیلومتر به سمت جنوب پیموده است. این قایق چند کیلومتر از نقطه‌ی شروع حرکت فاصله دارد؟



۷. نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ باشد، طول وتر آن چقدر است؟

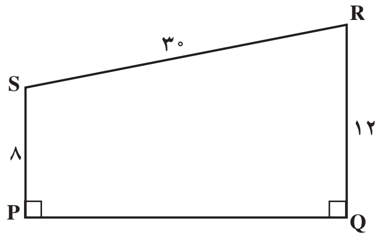
۸. طول یکی از ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۴}{۵}$ دیگری است. مساحت مثلث ۳۲۰ سانتی‌متر مربع است. طول اضلاع زاویه قائمه را بیابید.

۹. از به هم وصل کردن وسط‌های ضلع‌های مربعی، یک مربع دیگر ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع کوچکتر به مساحت مربع بزرگتر چقدر است؟

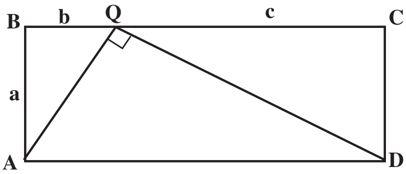


۱۰. مساحت مربعی که طول قطر آن $۸\sqrt{۲}$ است را پیدا کنید.

۱۱. در شکل زیر، طول ضلع PQ را محاسبه کنید.



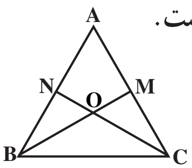
۱۲. در شکل زیـــر، ABCD یک مستطیل و AQD یک مثلث قائم‌الزاویه است. اگر $AB = a$ ، $BQ = b$ و $QC = c$ ، ثابت کنید :



الف) $AD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$

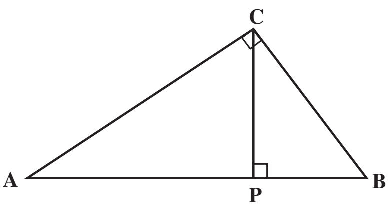
ب) $a^2 = bc$

۱۳. در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به رو به زاویه‌ی $30°$ نصف وتر است.



۱۴. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده‌اند ثابت کنید : $\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON} = 2$

۱۵. مثلث ABC در رأس C قائمه است. از C، پاره‌خط CP را بر AB عمود می‌کنیم. ثابت کنید :

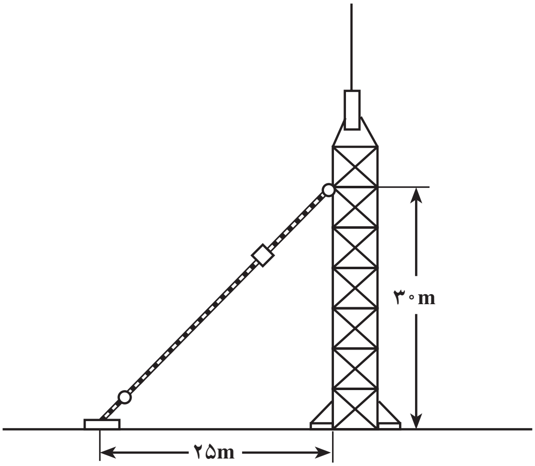


الف) $PC^2 = AP \times PB$

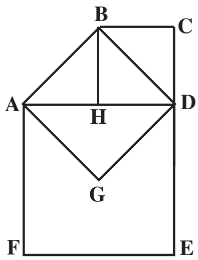
ب) $AC^2 = AP \times AB$

۱۶. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس ثابت کنید، اگر وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر برابر باشند، طول اضلاع دیگر زاویه‌ی قائمه در دو مثلث با هم برابرند.

۱۷. یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع ۳۰ متری توسط یک سیم به‌طور قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله‌ی ۲۵ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است. طول این سیم چند متر است؟



۱۸. سه مربع مانند شکل، یکدیگر را قطع کرده‌اند. مساحت مثلث ADG را در هریک از حالت‌های زیر به‌دست آورید.



الف) $AF = ۱۰$ ؛

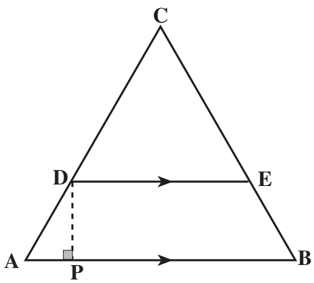
ب) $CE = ۱۸$ ؛

پ) $BD = ۳\sqrt{۲}$ ؛

ت) ۴۹ = مساحت مربع BCDH ؛

ث) ۲۷ = مساحت شکل AGDEF ؛

۱۹. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱۰ واحد را درنظر بگیرید و پاره‌خط DE را طوری رسم کنید تا AD برابر ۴ واحد گردد.

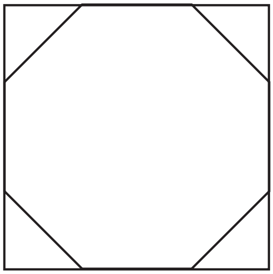


الف) طول DP را به‌دست آورید.

ب) طول PE را محاسبه کنید.

پ) چگونه با سه بُرش روی ذوزنقه ABED می‌توان مثلث متساوی الاضلاعی با طول ۸ واحد ساخت؟ آیا با دو برش نیز می‌توان این کار را انجام داد؟

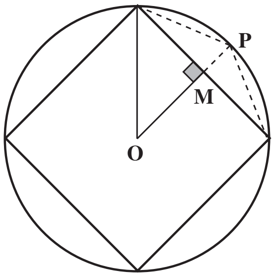
۲۰. در شکل زیر یک هشت‌ضلعی منتظم در داخل یک مربع محاط شده است.



الف) اگر طول ضلع هشت‌ضلعی ۲ سانتی‌متر باشد، طول ضلع مربع را بیابید.

ب) اگر طول ضلع مربع ۱۰ سانتی‌متر باشد، محیط هشت‌ضلعی را به‌دست آورید.

۲۱. مربعی در یک دایره‌ی به شعاع واحد محاط شده است.



الف) فاصله‌ی مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید.

ب) طول MP را به‌دست آورید.

پ) طول ضلع هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را محاسبه کنید.

۲۲. مسأله‌ی ۲۱ را در حالتی که یک شش ضلعی در دایره محاط شده باشد، در نظر بگیرید و طول ضلع دوازده ضلعی منتظمِ محاط در دایره را بدست آورید.

فصل ۳

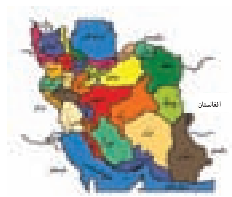
تشابه



۳ــ۱ــ نسبت و تناسب

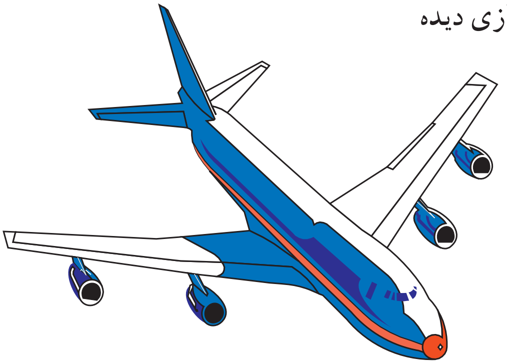
به این دو تصویر نگاه کنید. چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی بین آن‌ها وجود دارد؟





هر دو در واقع یک تصویر ولی با اندازه‌های مختلف هستند. این شکل‌های شبیه به هم نمونه‌ای از شکل‌های **متشابه** می‌باشند.

شکل‌های متشابه کاربردهای بسیاری در زندگی معمولی ما دارند. برای مثال، یکی از بهترین راه‌های دادن آدرس به افراد، استفاده از نقشه است. نقشه، تصویری از دنیای واقعی در ابعاد کوچک‌تر و متشابه با آن است. همچنین، برای ساختن یک ساختمان یا یک وسیله، طراحی ماکت آن که مشابه با ساختمان یا وسیله‌ی اصلی است، کمک مهمّی به حساب می‌آید.



در شکل روبه‌رو، تصویر یک هواپیمای اسباب‌بازی دیده می‌شود. فرق این تصویر با هواپیمای واقعی این است که اندازه‌های اجزای آن نسبت به هواپیمای واقعی خیلی کوچک‌تر است، یعنی شکل‌های هواپیمای واقعی و اسباب‌بازی **متشابه** هستند. در دو شکل متشابه، اندازه‌های اجزای یک شکل با اندازه‌های اجزای نظیر در شکل دیگر متناسب هستند و این ویژگی در ساختن تمام ماکت‌ها نیز رعایت می‌شود.

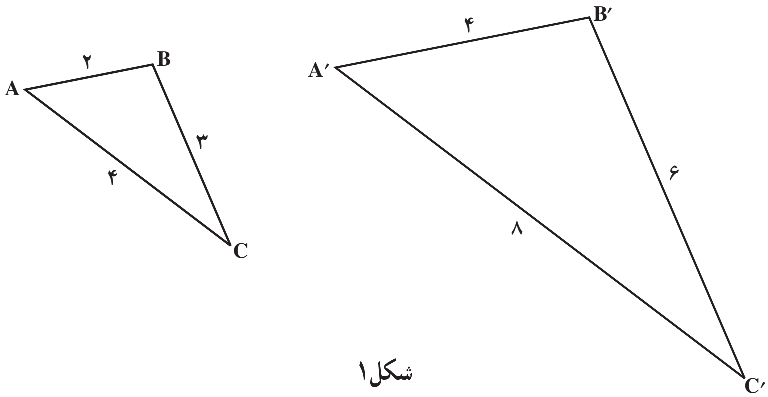
یکی دیگر از مثال‌های ملموس شکل‌های متشابه، بزرگ شده یا کوچک‌شده‌ی تصویر چهره‌ی انسان است.



برای مثال، در تصویرهای ۴×۳ و ۸×۱۲ نسبت فاصله‌ی دو چشم برابر با نسبت فاصله‌ی بینی تا دهان در دو تصویر است. به همین ترتیب، نسبت موجود در تمام اجزای متناظر در دو تصویر ثابت می‌ماند. یعنی، به جز اندازه‌های ابعاد دو عکس، تفاوت دیگری بین این دو تصویر دیده نمی‌شود. در واقع، با دیدن هریک از آن‌ها می‌توانید صاحب تصویر واقعی را درنظر مجسم کنید.

در شکل ۱، مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ دو شکل متشابه هستند، زیرا از هر نظر شبیه یکدیگرند، جز این‌که اندازه‌ی هر ضلع مثلث $A'B'C'$ ، دوبرابر اندازه‌ی هر ضلع مثلث ABC است، یعنی

$$A'B' = ۲AB \ , \ B'C' = ۲BC \ , \ A'C' = ۲AC$$



شکل۱

بنابراین، **نسبت** هر ضلع مثلث بزرگ به ضلع نظیر آن در مثلث کوچک برابر با ۲ است و تمام این نسبت‌ها با هم برابرند، یعنی

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = ۲$$

که هر دو نسبت برابر تشکیل یک **تناسب** می‌دهند. از نسبت و تناسب در حل مسائل مختلف ریاضی استفاده می‌شود.

مثال ۱: اگر قیمت ۵ خودکار ۲۵۰ تومان باشد، چند خودکار با ۱۵۰ تومان می‌توان خرید؟

حل: قیمت ۵ خودکار ۲۵۰ تومان است. پس قیمت هرخودکار

$$\frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰ \text{ تومان}$$

اگر با ۱۵۰ تومان بتوان a خودکار خرید، آن‌گاه

$$\frac{۱۵۰}{a} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$$

و یک تناسب به‌دست می‌آید، که به راحتی می‌توان a را از آن به‌دست آورد :

$$a=\frac{۱۵۰}{۵۰}=۳$$

نسبت بین دو عدد a و b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ ، که b نباید صفر باشد، چون تقسیم کردن یک عدد بر صفر معنی ندارد.

تساوی بین دو نسبتِ $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، (که b و d صفر نیستند) یک **تناسب** نامیده می‌شود.

در تناسب $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ ، a و d دو جمله‌ی کناری (طرفین) و b و c دو جمله‌ی میانی (وسطین) نام دارند. همچنین، اگر دو طرف تناسب $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ را در bd ضرب کنیم،

$$bd(\frac{a}{b})=bd(\frac{c}{d})$$

آنگاه

$$ad=bc$$

در تناسب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی برابر حاصل‌ضرب دو جمله‌ی کناری است.

$$ad=bc$$

این ویژگی، ما را در حل مسائل مربوط به نسبت و تناسب و شکل‌های متشابه یاری می‌کند.

مثال ۲: در هریک از تناسب‌های زیر، مقدار m را پیدا کنید :

الف) $\frac{m}{۳}=\frac{۹}{۱۰}$ ب) $\frac{m}{m+۲}=\frac{۳}{۴}$

حل : ویژگی مهم تناسب که در بالا به آن اشاره شد، کمک می‌کند که مقدار m را در قسمت‌های (الف) و (ب) به‌دست آوریم :

الف)

$$۱۰m=۳\times۹$$

$$۱۰m=۲۷$$

پس $m = \frac{۲۷}{۱۰}$

ب) $۴m = ۳(m+۲)$

$= ۳m + ۶$

در نتیجه :

$۴m - ۳m = ۶$

پس $m = ۶$

مثال ۳: مقدارهای x و y را از تناسب‌های

(۱) $\frac{x}{۴} = \frac{۱}{y}$ و $\frac{۱}{y} = ۳$

به‌دست آورید.

حل: چون $\frac{۳}{۱} = \frac{۱}{y}$ پس $۳y = ۱$ یعنی $y = \frac{۱}{۳}$. از طرف دیگر از تناسب $\frac{x}{۴} = \frac{۱}{y}$ نتیجه می‌گیریم

(۲) $xy = ۴ \times ۱ = ۴$

مقدار $y = \frac{۱}{۳}$ را که از تناسب قبل به‌دست آمد، در (۲) جایگزین می‌کنیم.

$x \times \frac{۱}{۳} = ۴$

یعنی :

$x = ۳ \times ۴ = ۱۲$

دو تناسب رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$\frac{x}{۴} = \frac{۱}{y} = ۳$

مثال ۴: مقدار n را در تناسب

$\frac{۳}{۹} = \frac{۹}{n}$

به‌دست آورید.

حل: چون $۳n = ۹ \times ۹ = ۸۱$. پس

$$n = \frac{۸۱}{۳} = ۲۷$$

عدد ۹ یک **میانگین هندسی**[۱] دو عدد ۳ و ۲۷ نامیده می‌شود.

۱ــ به میانگین هندسی، واسطه هندسی نیز گفته می‌شود.

در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$، b **میانگین هندسی** دو جملهٔ کناری a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطهٔ $b^۲ = ac$ به‌دست می‌آید.

فعالیت ۳ــ۱

آیا عدد π را به یاد می‌آورید؟ π نسبت محیط دایره به قطر آن است. ریاضیدانان باستان مقدار π را با تقریب‌های خوبی به‌دست آورده بودند و در محاسبات، ازآن استفاده می‌کردند. آن‌ها مقدارهای تقریبی π را به صورت نسبت بیان می‌کردند. دو نسبت معروف در تاریخ ریاضی که به عنوان تقریب π به‌کار می‌رفته‌اند، عبارت از $\frac{۲۲}{۷}$ و $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ هستند.

۱. نسبت $\frac{۲۲}{۷}$ را به صورت اعشاری تا دو رقم اعشار گرد کنید و بنویسید.

۲. نسبت $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ را به صورت اعشاری تا دو رقم اعشار گرد کنید و بنویسید.

۳. چه رابطه‌ای بین مقدارهای تقریبی به‌دست آمده در قسمت‌های ۱ و ۲ وجود دارد؟

۴. برای دو نسبت $\frac{۲۲}{۷}$ و $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ حاصل ضرب دو جملهٔ میانی و حاصل‌ضرب دو جملهٔ کناری را پیدا کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ . علت تفاوت بین پاسخ‌های سؤال‌های ۳ و ۴ در چیست؟

بعضی از ریاضی‌دانان ایرانی نیز نسبت $\frac{۲۲}{۷}$ را به جای مقدار π به‌کار می‌برده‌اند. نخستین ریاضی‌دانی که مقدار π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد، **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** (۷۶۳ــ۸۰۷ هجری) بود.

بعضی از ویژگی‌های مهم تناسب که کاربرد بسیاری در حل مسائل تشابه دارند در اینجا گردآوری شده‌اند.

۱. در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان جای دو جمله میانی را عوض کرد و تناسب $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ را به‌دست آورد.

۲. درتناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان کسرها را معکوس کرد و تناسب $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ را به‌دست آورد.

۳. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ و $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ ؛

۴. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$، آن‌گاه، $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$.

مثال ۵: به کمک ویژگی‌های تناسب، مقدار p را از تناسب

$$\frac{۷-P}{P}=\frac{۱۲}{۲۰}$$

پیدا کنید.

حل: بنابر ویژگی۳،

$$\frac{(۷-p)+p}{p}=\frac{۱۲+۲۰}{۲۰}$$

در نتیجه :

$$\frac{۷}{p}=\frac{۳۲}{۲۰}$$

یعنی :

$$۳۲p=۱۴۰$$

پس :

$$p=\frac{۱۴۰}{۳۲}=\frac{۳۵}{۸}$$

مسائل

۱. اگر قیمت ۱۰ عدد از یک کالا ۴۰۰ تومان باشد، قیمت چند عدد از آن، ۸۰ تومان خواهد بود؟

۲. میانگین هندسی بین هریک از جفت عددهای زیر را پیدا کنید :

الف) ۴ و ۲۵ ؛

ب) $۳\sqrt{۲}$ و $۶\sqrt{۲}$ ؛

پ) ۷ و ۲۱ ؛

۳. در هریک از موارد زیر، ازکدام‌یک از ویژگی‌های تناسب استفاده شده است؟

الف) اگر $\frac{۸}{۵}=\frac{a}{b}$، آنگاه $۵a=۸b$ ؛

ب) اگر $\frac{۳}{۲}=\frac{c}{d}$ ، آنگاه $\frac{۲}{۳}=\frac{d}{c}$ ؛

پ) اگر $\frac{۴}{۹}=\frac{e}{v}$ ، آنگاه $\frac{۴}{e}=\frac{۹}{v}$ ؛

ت) اگر $\frac{b}{۱۱}=\frac{a}{۳}$ ، آنگاه $\frac{b+۱۱}{۱۱}=\frac{a+۳}{۳}$.

۴. در هریک از موارد زیر جای خالی را پر کنید :

الف) اگر $\frac{۱}{۲}=\frac{x}{y}$ ، آنگاه $\square=\frac{x+۱}{y+۲}$ ؛

ب) اگر $\frac{d}{۵}=\frac{c}{۴}=\frac{b}{۳}=\frac{a}{۲}$ ، آنگاه $\frac{a}{\square}=\frac{a+b+c+d}{\square}$ ؛

پ) اگر $\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۲}{x}$ ، آنگاه $\square=\frac{۱۲}{۳}$.

۵ . در هریک از موارد زیر مقدار x را به‌دست آورید :

الف) $\frac{۲۴}{x}=\frac{۴}{۵}$

ب) $\frac{۳}{۷}=\frac{x}{۱۸۰-x}$

پ) $\frac{x}{۹}=\frac{۴}{x}$

ت) $\frac{۲}{۳x-۲}=\frac{۴}{x+۱}$

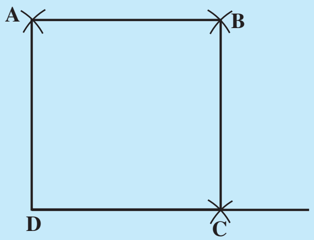
۶ . مقدار x و y را از هرکدام از تناسب‌های زیر محاسبه کنید :

الف) $\frac{۲۱}{y}=\frac{x}{۲۰}=\frac{۹}{۱۲}$

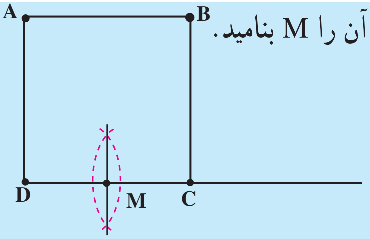
ب) $y=\frac{۲۰}{x}=\frac{x}{۵}$

مجله‌ی ریاضی

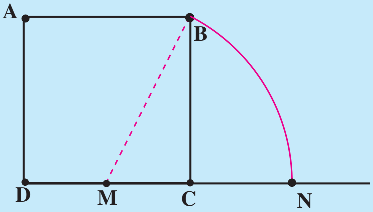
۱. مربع ABCD را با ضلع دلخواه رسم کنید.



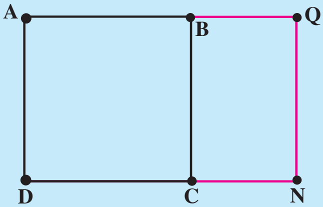
۲. وسط ضلع DC را بیابید و آن را M بنامید.



۳. به مرکز M و با شعاع MB کمانی بزنید تا امتداد DC را در نقطه N قطع کند.



۴. از نقطه N، خطی عمود بر DC رسم کنید تا امتداد AB را در Q قطع کند.

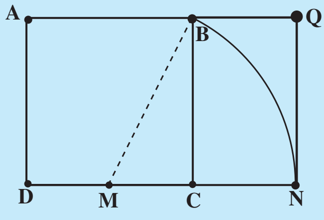


چهارضلعی AQND یک **مستطیل طلایی** نامیده می‌شود که به وسیله‌ی BC به یک مربع و یک مستطیل بازهم **طلایی** تقسیم شده است! هر دو شکل AQND و BQNC مستطیل‌های طلایی هستند که ضلع‌های نظیر آن‌ها با هم **متناسبند**.

۵ . برای نشان دادن این که چرا ضلع‌های دو مستطیل با هم متناسب هستند، فرض کنید در مستطیل زیر، MC = ۱ سپس اندازه‌ی طول‌های زیر را حساب کنید :

الف) BC   ب) MB   پ) MN

ت) CN   ث) DN



۶ . با استفاده از طول‌های به‌دست آمده در قسمت (۵)، نشان دهید که اجزای متناظر مستطیل AQND و مستطیل BQNC با هم **متناسب** هستند.

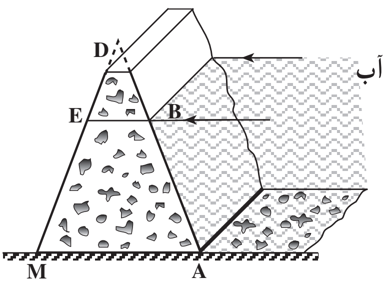
جالب است بدانید که نسبت ضلع بلندتر به ضلع کوتاه‌ترِ **مستطیل طلایی** که **نسبت‌طلایی** نامیده می‌شود، در بسیاری از طرح‌های هنری از قبیل معماری و خطّاطی ظاهر می‌شود. مطابق تحقیقات انجام شده، نسبت طول ضلع قاعده به ارتفاع، در اهرام ثلاثه مصر، برابر نسبت طلایی است. همچنین دیوارهای معبد پارتنون از مستطیل‌های طلایی ساخته شده است؛ زیرا به اعتقاد آن‌ها، مستطیل‌های با نسبت‌های طلایی به چشم خوشایندتر هستند!



سد جیرفت

۳ــ۲ــ قضیه تالس در مثلث

شکل ۲، نمای جانبی ساده‌ای از یک سد را نشان می‌دهد. سطح مقطع قائم سد، مثلث DAM[1] است. همان‌طور که می‌بینید، خط سطح آب پشت سد، موازی ضلع پایینی مثلث است. چون مقاومت سد در برابر فشار آب پشت آن به عوامل متعددی ازجمله طول BA بستگی دارد، در نتیجه محاسبه‌ی طول BA برای به‌دست آوردن مقاومت سد ضروری است. قضیه‌ی تالس در مثلث به ما کمک می‌کند تا این طول را محاسبه کنیم.



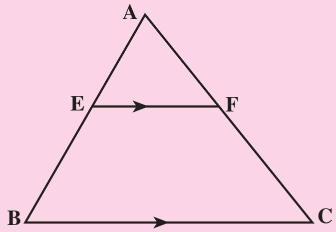
شکل ۲

۱. DAM در انگلیسی به معنای سد است!

قضیه‌ی تالس

اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند.

یعنی اگر در مثلث ABC، EF موازی BC باشد، آن‌گاه $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$



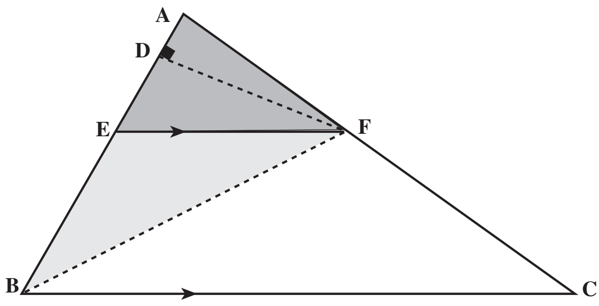
شکل ۳

قبل از این‌که به اثبات قضیه تالس بپردازیم، کاربرد این قضیه را در مثال سد می‌بینیم. در شکل ۲، چون پاره‌خط BE موازی AM است و ضلع‌های DM و DA را قطع می‌کند، در نتیجه طبق قضیه‌ی تالس، نسبت طول دو پاره‌خط DB و BA برابر نسبت طول دو پاره‌خط DE و EM است. یعنی :

$$\frac{DB}{BA}=\frac{DE}{EM}$$

حال قضیه‌ی تالس را در چهار مرحله با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت می‌کنیم.

مرحله‌ی ۱: از F به B وصل کرده، سپس پاره‌خط FD را بر AB عمود می‌کنیم. پاره‌خط FD ارتفاع نظیر قاعده‌ی AE از مثلث AFE و همچنین ارتفاع نظیر قاعده‌ی EB از مثلث EFB خواهد بود. بنابراین



شکل ۴

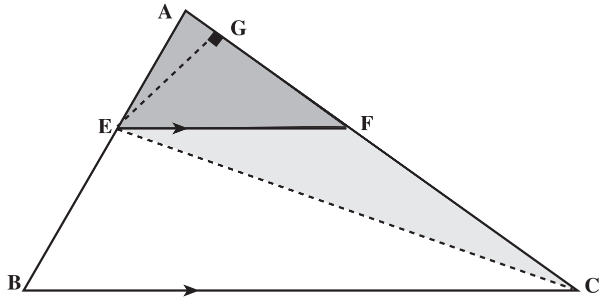
$$\text{AFE مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}AE\times FD$$

$$\text{EFB مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}EB\times FD$$

در نتیجه :

(۱)
$$\frac{\text{AFE مساحت مثلث}}{\text{EFB مساحت مثلث}}=\frac{AE}{EB}$$

مرحله‌ی ۲: از E به C وصل کرده، سپس پاره‌خط EG را بر AC عمود می‌کنیم، در این صورت



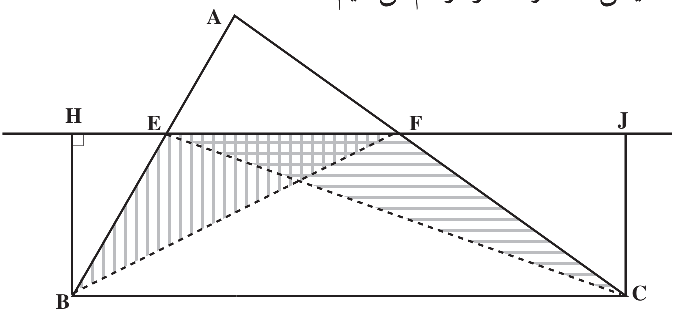
شکل ۵

$$\frac{\text{AFE مساحت مثلث}}{\text{EFC مساحت مثلث}}=\frac{AF}{FC}$$

(۲)

دلیل درستی تساوی (۲) را توضیح دهید.

مرحله‌ی ۳: پاره‌خط EF را از دو طرف امتداد می‌دهیم. سپس ارتفاع‌های نظیر قاعده‌ی EF در دو مثلث EFB و EFC ، یعنی BH و CJ را رسم می‌کنیم.



شکل ۶

چهارضلعی BHJC یک مستطیل است. (چرا؟) بنابراین

$$BH=CJ$$

از طرفی

$$\text{EFB مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}EF\times BH$$

$$\text{EFC مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} EF \times CJ$$

در نتیجه :

(۳) $$\text{EFC مساحت مثلث} = \text{EFB مساحت مثلث}$$

مرحله‌ی ۴: در رابطه‌ی (۲) می‌توان در مخرج کسر سمت چپ با استفاده از رابطه‌ی (۳) مساحت مثلث EFB را قرار داد. یعنی :

(۴) $$\frac{\text{AFE مساحت مثلث}}{\text{EFB مساحت مثلث}} = \frac{AF}{FC}$$

مقایسه‌ی (۴) و (۱) نشان می‌دهد که سمت چپ تساوی‌ها با هم برابرند. در نتیجه :

(۵) $$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

و به این ترتیب قضیه‌ی تالس ثابت می‌شود.

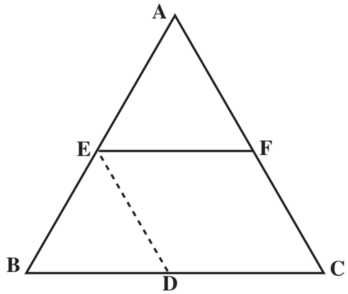
تمرین: در شکل ۲، اگر $DB = ۳۰m$ ، $DE = ۲۰m$ و $DM = ۱۰۰m$ باشد، با استفاده از قضیه‌ی تالس، طول BA را پیدا کنید.

نتیجه‌ی ۱: چون از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ به‌دست می‌آید، پس از تناسب (۵) نتیجه می‌شود.

$$\frac{AE}{AE+EB} = \frac{AF}{AF+FC}$$

یعنی :

(۶) $$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$



شکل ۷

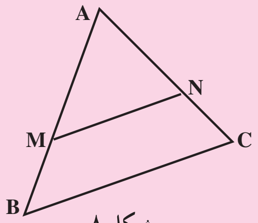
نتیجه‌ی ۲: در مثلث ABC، پاره‌خط EF موازی BC است. اگر از نقطه‌ی E، پاره‌خط ED را موازی AC رسم کنیم، با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، نتیجه‌ی مهم زیر به دست می‌آید.

(۷) $$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

تمرین: رابطه‌ی (۷) را ثابت کنید.

راهنمایی: چهارضلعی EDCF متوازی‌الاضلاع است، در نتیجه EF = DC .

نتیجه‌ی ۳: (عکس قضیه تالس) اگر در مثلث ABC (شکل ۸) نقطه‌های M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که $\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB}$ ، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که پاره‌خط MN موازی ضلع BC است.

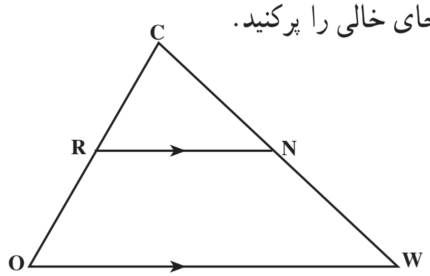


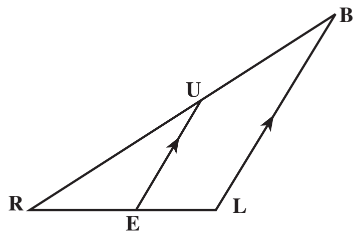
شکل ۸

تمرین: برای اثبات نتیجه‌ی ۳ از نقطه‌ی B خطی به موازات MN رسم کنید تا AC را در D قطع کند. سپس با استفاده از قضیه‌ی تالس نشان دهید D و C بر هم منطبقند.

مسائل

۱. با توجه به شکل‌ها، در هرکدام از موارد زیر جای خالی را پرکنید.





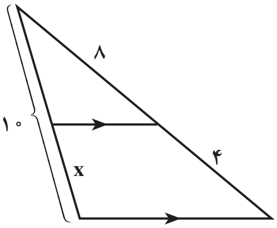
در مثلث COW، پاره‌خط RN با پاره‌خط OW موازی است :

الف) $\square = \frac{OR}{RC}$ ب) $\square = \frac{NW}{CW}$

در مثلث RBL، پاره‌خط EU با پاره‌خط LB موازی است :

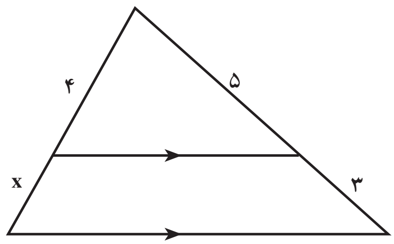
پ) $\square = \frac{EL}{RE}$ ت) $\square = \frac{RU}{RB}$

۲. دو دانش‌آموز تصمیم گرفتند به کمک قضیه‌ی تالس طول x را در شکل روبه‌رو به دست آورند.

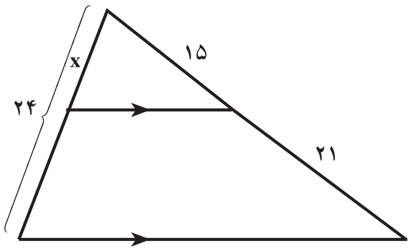


دانش‌آموز اول تناسب $\frac{۴}{۸}=\frac{x}{۱۰}$ و دانش‌آموز دوم تناسب $\frac{۴}{۸}=\frac{x}{۱۰-x}$ را نوشت. کدامیک از این دو تناسب صحیح است؟ به نظر شما تناسب درستی که x را به دست می‌دهد کدام است؟

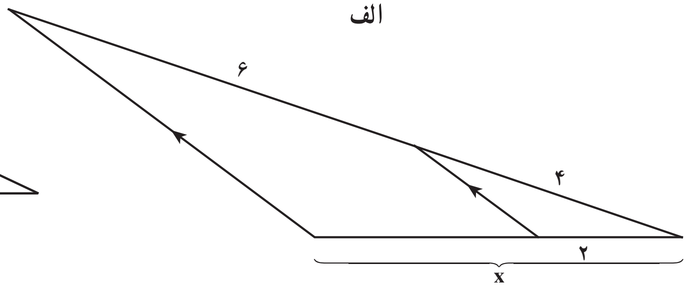
۳. در هر یک از شکل‌های زیر طول مجهول x را محاسبه کنید :



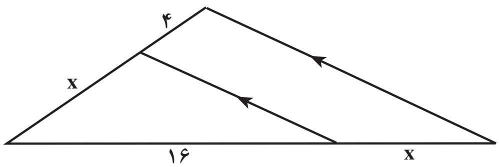
الف



ب

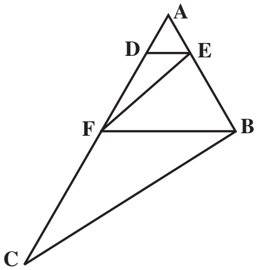


پ

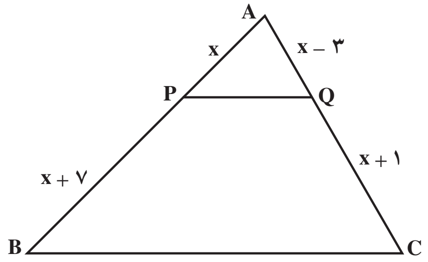


ت

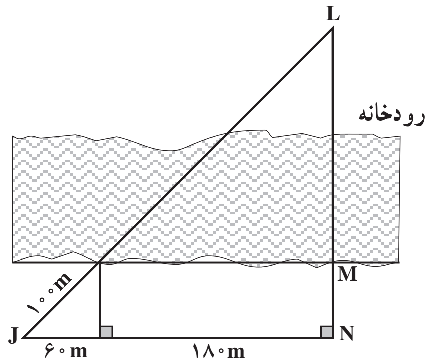
۴. در مثلث ABC، در شکل روبه‌رو، DE با FB موازی است و EF با BC. با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس ثابت کنید $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$.



۵. در شکل روبه‌رو PQ با BC موازی است. به کمک قضیه‌ی تالس طول x را حساب کنید.



۶. دهکده‌ای در یک سوی رودخـانه و دکل‌های سراسری انتقال نیرو در سوی دیگر رودخانه واقع است. با توجّه به فاصله‌های داده شده در شکل، طول سیم لازم برای برق‌رسانی به دهکده یعنی JL را محاسبه کنید.

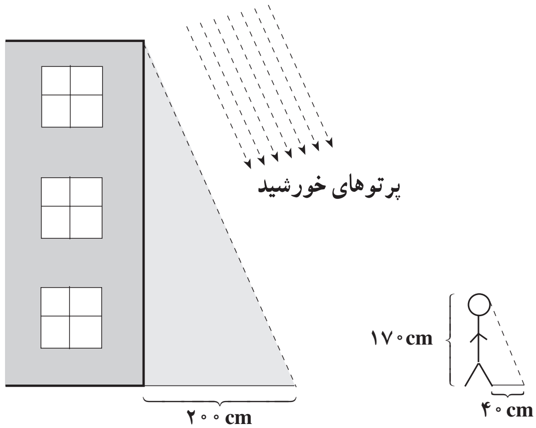


۳ــ۳ــ مثلث‌های متشابه

معلم درس هندسه‌ی آرش تصمیم گرفت به دانش‌آموزی که بتواند فقط به کمک یک خط‌کش ارتفاع ساختمان مدرسه را اندازه‌گیری کند، جایزه بدهد. آرش اندیشید که چگونه باید این کار را انجام دهد؟ ارتفاع ساختمان مدرسه خیلی بلندتر از خط‌کش او بود. او از خود پرسید آیا می‌توان راه راحت‌تری برای محاسبه‌ی ارتفاع ساختمان بدون اندازه‌گیری مستقیم آن پیدا کرد؟ ظهر در راه منزل،



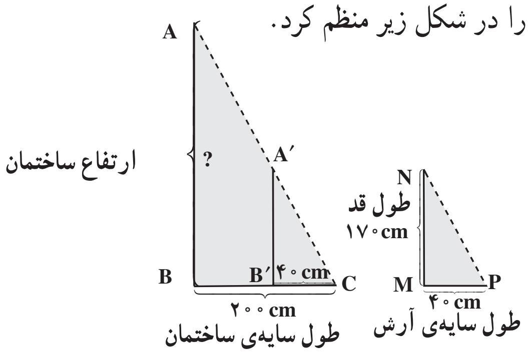
در حالی که به زمین خیره شده بود ناگهان متوجه این نکته جالب شد که طول سایه در ظهر خیلی کوتاه است و اندازه‌گیری آن با خط‌کش امکان‌پذیر می‌باشد!؟ آرش فوراً به مدرسه بازگشت و طول سایه‌ی ساختمان مدرسه که بر زمین عمود بود و طول سایه‌ی خود را در حالت ایستاده به وسیله‌ی خط‌کش اندازه گرفت. او سپس قامت و سایه‌ی خود همچنین ساختمان و سایه‌ی آن را ضلع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه در نظر گرفت.



شکل ۹

آیا این اطلاعات برای تعیین اندازه‌ی ارتفاع ساختمان مدرسه کافی بود[1]؟

آرش اطلاعات خود را در شکل زیر منظم کرد.



شکل ۱۰

آنگاه B′C را روی ضلع BC به اندازه‌ی MP جدا کرد و A′B′ را نیز بر BC عمود نمود. چون دو خط A′B′ و AB بر BC عمودند، پس با هم موازی هستند. بنابراین، با استفاده از نتیجه‌ی۲

۱ــ شعاع‌های تابش با هم موازیند.

قضیه‌ی تالس

(۱) $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C}=\frac{AC}{A'C}$

آرش همچنین از همنهشتی دو مثلث $A'B'C$ و NMP (به حالت ز‌ض‌ز) تساوی $A'B'=NM$ را به دست آورد و در (۱) جایگزین کرد :

(۲) $\frac{AB}{NM}=\frac{BC}{MP}$

یا $\frac{AB}{۱۷۰}=\frac{۲۰۰}{۴۰}$

در نتیجه :

$AB=\frac{۱۷۰\times۲۰۰}{۴۰}$

ارتفاع ساختمان $= AB = ۸۵۰cm$

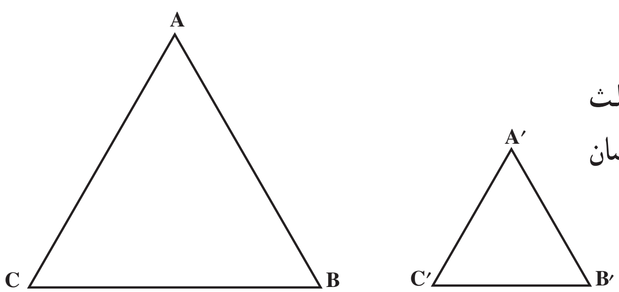
در شکل ۱۰، زاویه‌ی C در دو مثلث ABC و $A'B'C$ مشترک است و زاویه‌های B و B' هر دو قائمه و برابرند. پس زاویه‌های A و A' نیز مساوی‌اند. همچنین دو مثلث $A'B'C$ و NMP همنهشت هستند، در نتیجه زاویه‌های نظیر دو مثلث ABC و NMP نیز با هم مساوی‌اند. از طرف دیگر، چون $MN=A'B'$، $MP=B'C$ و $NP=A'C$، رابطه‌ی (۱) را می‌توان به صورت

$\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{MP}=\frac{AC}{NP}$

نوشت، یعنی ضلع‌های نظیر در دو مثلث متناسبند. در این حالت، دو مثلث را متشابه می‌نامند.

> دو مثلث را متشابه گویند، اگر زاویه‌های نظیر در آن‌ها برابر و ضلع‌های نظیر متناسب باشد.

مثال ۵: در شکل ۱۱ دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $A'B'C'$ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۱

چون هر زاویه مثلث متساوی‌الاضلاع 60° است، بنابراین زاویه‌های این دو مثلث با هم برابرند. از طرف دیگر، چون طول ضلع‌های هر مثلث متساوی‌الاضلاع نیز مساوی هستند، هر سه نسبت $\frac{AB}{A'B'}$ ، $\frac{AC}{A'C'}$ و $\frac{BC}{B'C'}$ با هم برابر خواهند بود زیرا دارای صورت‌های مساوی و مخرج‌های مساوی هستند. پس دو مثلث متساوی‌الاضلاع به دلیل تناسب ضلع‌های نظیر و تساوی سه زاویه، طبق تعریف با هم متشابه هستند.

هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع، متشابه هستند.

۳ـ۴ـ حالت‌های تشابه دو مثلث

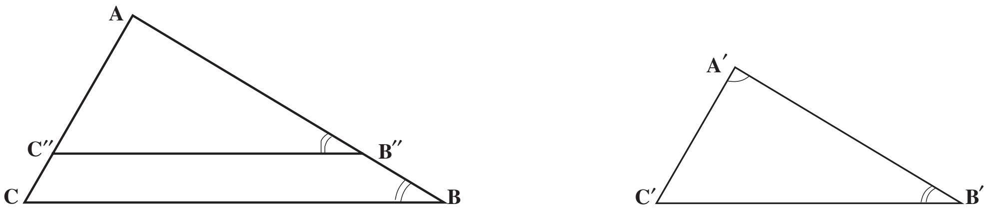
دو مثلث در سه حالت با هم متشابه‌اند.

۳ـ۴ـ ۱ـ تشابه دو مثلث در حالت تساوی دو زاویه

آرش فقط با استفاده از تساوی دو زاویه‌ی $\hat{P}$ و $\hat{C}$ ، تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و NMP را نتیجه گرفت، پس اگر **یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشد، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند.** چون زاویه‌های قائمه در این دو مثلث نیز با هم برابرند، پس دو زاویه از یک مثلث قائم‌الزاویه با دو زاویه از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابرند. این مطلب نه فقط برای دو مثلث قائم‌الزاویه بلکه برای هر دو مثلثی درست است، یعنی :

اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

برای نشان‌دادن درستی این حالت، شکل ۱۲ را در نظر می‌گیریم. در این شکل، زاویه‌های A و A′ با هم و زاویه‌های B و B′ نیز با هم برابرند.



شکل ۱۲

نقطه‌ی B' [1] را روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AB' = A'B'$ و از آن پاره‌خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در C' قطع کند. دو مثلث $A'B'C'$ و $AB'C'$ به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند (چرا؟) بنابراین $AC' = A'C'$ و $B'C' = B'C'$.

چون پاره‌خط $B'C'$ موازی ضلع BC است، در مثلث ABC بنابر قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

همچنین، $AB' = A'B'$ ، $AC' = A'C'$ و $B'C' = B'C'$ پس

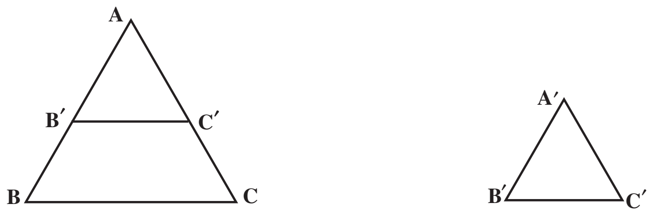
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

یعنی ضلع‌های دو مثلث متناسب هستند. از طرف دیگر، زاویه‌های سوم دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم برابرند، زیرا $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و چون $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ$ و $\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}' = ۱۸۰^\circ$ پس $\hat{C} = \hat{C}'$. در نتیجه طبق تعریف تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند.

۳ــ۴ــ۲ــ تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آنها: در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (شکل ۱۳)

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \qquad (۱)$$



شکل ۱۳

برای نشان دادن تشابه دو مثلث در این حالت، باید تساوی دو زاویه‌ی دیگر و متناسب بودن ضلع سوم آن‌ها را نتیجه بگیریم. برای این کار،نقطه‌ی C' را روی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AC' = A'C'$. از C' خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه‌ی B' قطع کند (شکل ۱۳). بنابر قضیه‌ی تالس در مثلث ABC

۱ــ B' را «ب زِگُوند» بخوانید.

(۲) $\frac{AC}{AC''}=\frac{AB}{AB''}=\frac{BC}{B''C''}$

مقدار مساوی AC'' یعنی $A'C'$ را در (۲) جایگزین می‌کنیم :

(۳) $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{AB''}$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم که

(۴) $AB''=A'B'$

بنابراین، دو مثلث $A'B'C'$ و $AB''C''$ به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند، پس سایر اجزای نظیر آنها نیز با هم برابرند، یعنی :

(۵) $B''C''=B'C'\ ,\ \hat{B'}=\hat{B''}\ ,\ \hat{C'}=\hat{C''}$

از طرفی چون پاره‌خط $B''C''$ با BC موازی است، پس :

(۶) $\hat{C}=\hat{C''}\ ,\ \hat{B}=\hat{B''}$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{C}=\hat{C'}$، یعنی سه زاویه‌ی دو مثلث ABC و $A'B'C'$ نظیر به نظیر با هم مساویند.

با درنظر گرفتن $AC''=A'C'$، $AB''=A'B'$ و $B''C''=B'C'$، رابطه‌ی (۲) را دوباره می‌نویسیم :

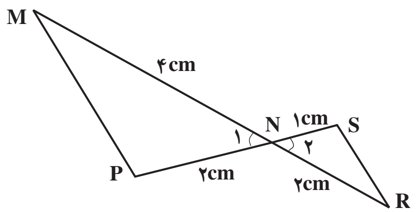
(۷) $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$

رابطه‌ی (۷) متناسب بودن ضلع‌های نظیر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را نشان می‌دهد، پس این دو مثلث متشابه‌اند.

اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

مثال ۶: در دو مثلث NSR و NPM

$$\frac{MN}{NR} = \frac{NP}{NS} = ۲$$



شکل ۱۴

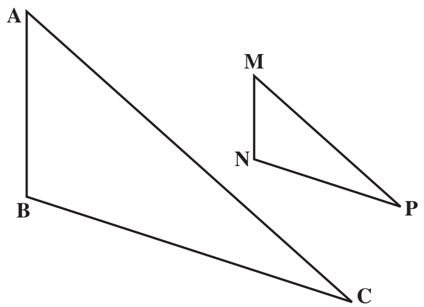
و چون زاویه‌های $N_۱$ و $N_۲$ متقابل‌به‌رأس هستند، درنتیجه $\hat{N}_۱ = \hat{N}_۲$. بنابراین، دو مثلث NSR و NPM در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آن‌ها، متشابه‌اند.

۳ــ۴ــ۳ــ تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن سه ضلع

متناسب بودن سه ضلع: تشابه دو مثلث را از متناسب بودن سه ضلع آن‌ها نیز می‌توان نتیجه گرفت. یعنی اگر در دو مثلث ABC و MNP

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$

آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث متشابه‌اند.



شکل ۱۵

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

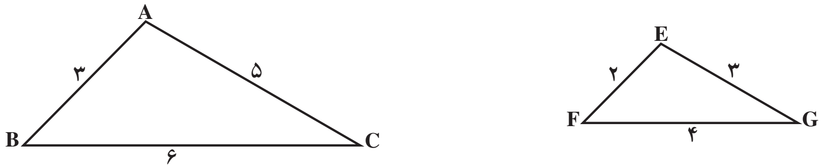
تمرین ۱: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، هرگاه سه ضلع از مثلثی، با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند (شکل ۱۵).

راهنمایی: به اندازه‌ی MN روی AB جدا کرده آن را B' بنامید و به اندازه‌ی MP روی AC جدا کنید و آن را C' بنامید. سپس $B'C'$ را رسم کرده، با استفاده از عکس قضیه‌ی تالس نتیجه را به‌دست آورید.

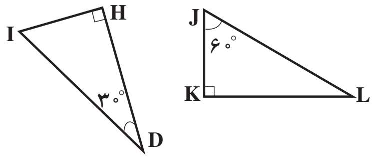
تمرین۲: نشان دهید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده روی وتر است.

مسائل

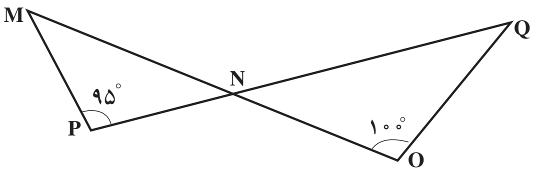
۱. در کدامیک از موارد زیر دو مثلث متشابه‌اند؟



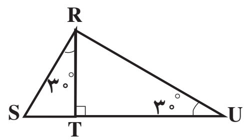
(الف)



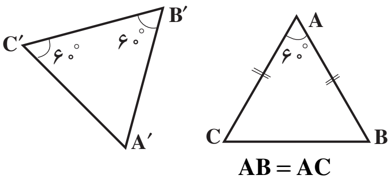
(ب)



(پ)

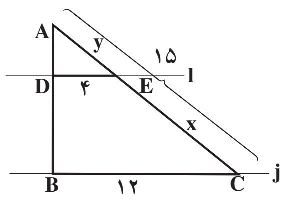


(ت)

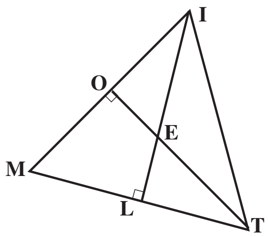


(ث)

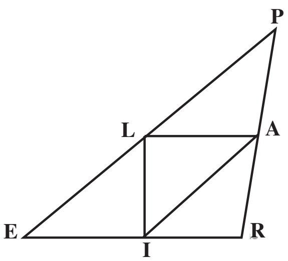
۲. در شکل زیر، خط l با خط j موازی است. طول‌های x و y را بیابید.



۳. در شکل روبه‌رو، IL و TO، ارتفاع های مثلث MIT هستند. چرا دو مثلث IOE و ELT متشابه هستند؟



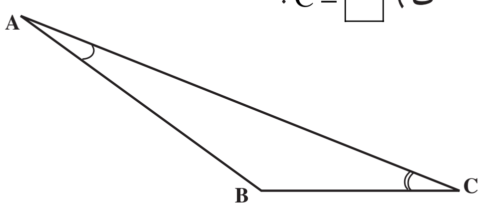
۴. در شکل روبه‌رو، نقاط L ،A و I به ترتیب نقاط وسط ضلع‌های PE ،PR و ER هستند. چرا دو مثلث ALI و PRE متشابه‌اند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

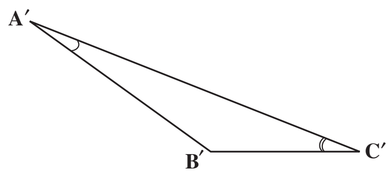


۵. اگر دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه باشند، در هریک از عبارت های زیر، جای خالی را پر کنید :

الف) $\frac{AC}{\square} = \frac{CB}{C'B'}$ ؛ ب) $\square = \hat{B}$ ؛

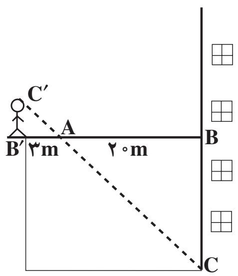
پ) $\frac{B'A'}{\square} = \frac{A'C'}{AC}$ ؛ ت) $\square = \hat{C}$.





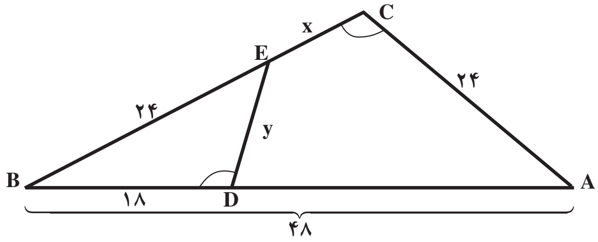
۶. دو قسمت مختلف یک بیمارستان به وسیله‌ی یک پل هوایی به هم مرتبط شده‌اند. محسن برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل در یک انتهای آن ایستاد و شعاع دید خود را بر رأس زاویه بین سطح زمین و ساختمان قرار داد.

الف) چرا دو مثلث ABC و AB′C′ متشابه‌اند؟

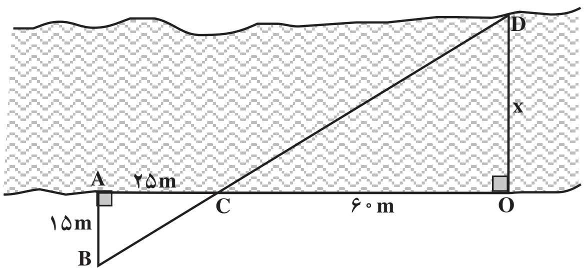


ب) با توجّه به اندازه‌های مشخّص شده در شکل و طول قد محسن که ۱/۸ متر می‌باشد، ارتفاع پل یعنی اندازه‌ی BC را به‌دست آورید[1].

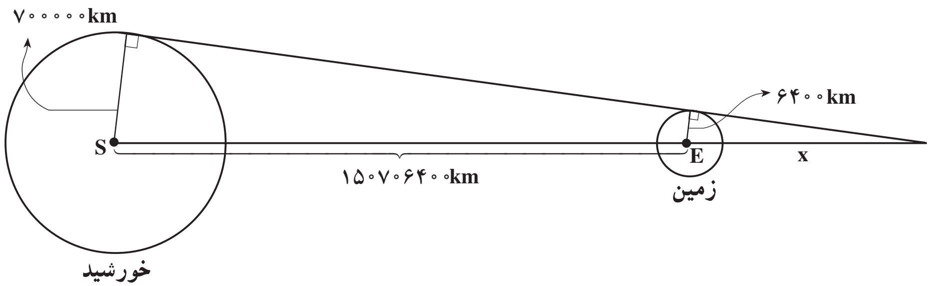
۷. در شکل زیر، $\hat{C} = B\hat{D}E$. طول x و y را پیدا کنید.



۸. شکل زیر توسط یک نقشه بردار برای محاسبه‌ی عرض رودخانه رسم شده است. به کمک اندازه‌های مشخص شده در شکل، عرض رودخانه را حساب کنید.



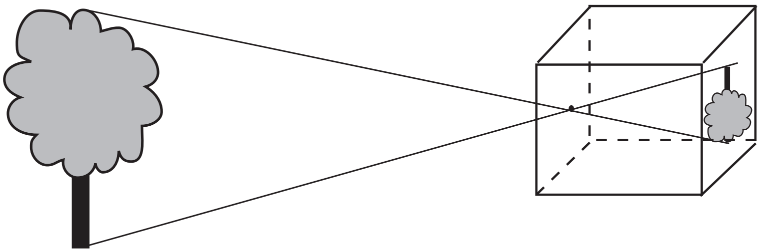
۹. در شکل زیر، شعاع‌های تقریبی زمین و خورشید و فاصله‌ی تقریبی مرکز زمین از مرکز خورشید داده شده است. به کمک یک ماشین حساب، طول تقریبی سایه‌ی زمین (x) را حساب کنید.



۱ــ اندازه‌های AB′ و AB تقریبی هستند.

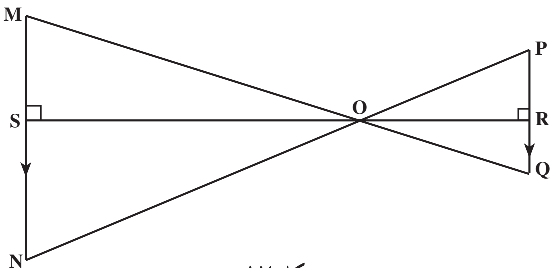
۳ــ۵ــ پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه

با ایجاد سوراخی در مرکز دیواره‌ی یک جعبه‌ی مکعب شکل و قراردادن یک کاغذ مات در درون جعبه درست روبه‌روی سوراخ، می‌توان آن‌را به یک دوربین عکاسی ساده به نام **جعبه‌ی تاریک** تبدیل نمود[۱].



شکل ۱۶

همان‌طور که در شکل ۱۶ می‌بینید، تصویری که از یک شیء در جعبه‌ی تاریک بر روی صفحه‌ی مات ایجاد می‌شود وارونه است. پرتوهای نور که از شیء می‌تابند و از سوراخ جعبه عبور می‌نمایند، دو مثلث ایجاد می‌کنند که در شکل ۱۷ نشان داده شده است. طول تصویری که در جعبه‌ی تاریک ایجاد می‌گردد با فاصله‌ی شیء از سوراخ متناسب است. این فاصله، ارتفاع OS از مثلث OMN است.



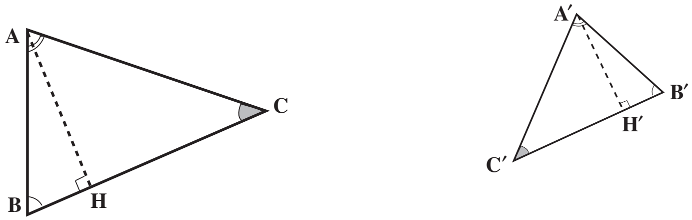
شکل ۱۷

فاصله‌ی سوراخ تا صفحه‌ی مات نیز ارتفاع OR از مثلث OPQ است. اگر دو ارتفاع OS و OR و نیز طول تصویر را بدانیم، آیا می‌توانیم طول شیء را به‌دست آوریم؟

۱ــ برای آشنایی بیشتر با طرز کار جعبه‌ی تاریک به کتاب آزمایشگاه فیزیک ۱ مراجعه نمایید.

فعالیت ۳ـــ۲

در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A}=\hat{A'}$ ، $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{C}=\hat{C'}$. پاره‌خط‌های AH و $A'H'$ به ترتیب ارتفاع‌های نظیر ضلع‌های BC و $B'C'$ هستند.



شکل ۱۸

۱. نسبت تشابه ضلع‌های متناظر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را بنویسید.
۲. چرا دو مثلث AHC و $A'H'C'$ متشابه هستند؟
۳. نسبت تشابه ضلع‌های متناظر دو مثلث AHC و $A'H'C'$ را بنویسید.
۴. از مقایسه‌ی ۱ و ۳ نتیجه می‌گیریم :

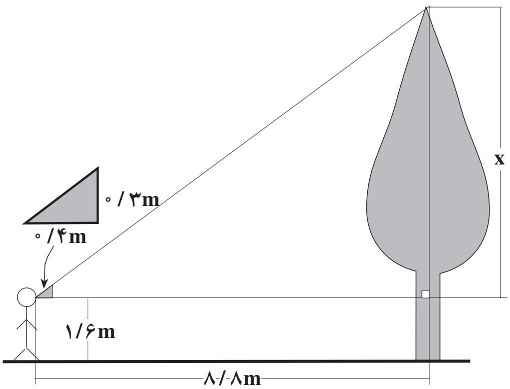
در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است، یعنی :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AH}{A'H'}$$

۵. چرا دو مثلث MNO و QPO در شکل ۱۷ متشابه‌اند؟ دلیل آن‌را توضیح دهید.
۶. نتیجه‌ی به‌دست آمده در قسمت ۴ را برای دو مثلث متشابه MNO و QPO بنویسید (شکل ۱۷).
۷. اگر OS یعنی فاصله‌ی درخت تا سوراخ جعبه ۲۲ متر، OR فاصله‌ی تصویر درخت تا سوراخ ۰/۲ متر و PQ طول تصویر درخت ۰/۱ متر باشد، طول درخت را پیدا کنید.

مثال۷: مریم برای پیدا کردن ارتفاع درخت مقابل خانه‌ی خودشان، یک تکه مقوا به شکل

مثلث قائم‌الزاویه با اندازه‌ی اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی ۰/۳ متر و ۰/۴ متر ساخت. اگر او در فاصله‌ی ۸/۸ متر از درخت بایستد می‌تواند، با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث، نوک درخت را ببیند. فاصله‌ی چشم او از زمین ۱/۶ متر است. مریم برای به‌دست آوردن ارتفاع تقریبی درخت به این صورت عمل کرد:



حل: دو مثلث قائم‌الزاویه در یک زاویه‌ی حادّه با هم مشترک هستند، پس با هم متشابه‌اند. درنتیجه ضلع‌های نظیر آن‌ها با هم متناسب‌اند. درنتیجه:

$$\frac{۸/۸}{۰/۴}=\frac{x}{۰/۳}$$

و

$$x=\frac{۰/۳\times ۸/۸}{۰/۴}$$

$$\boxed{x=۶/۶m}$$

امّا چون فاصله‌ی چشم مریم از زمین ۱/۶ متر است، پس

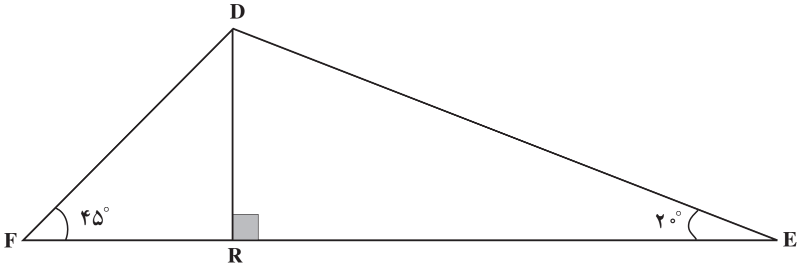
ارتفاع درخت $=۶/۶+۱/۶$

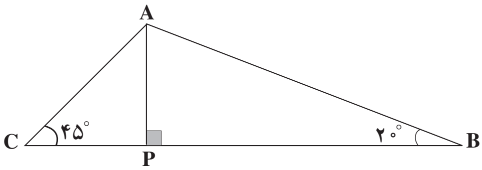
ارتفاع درخت $=۸/۲m$

با استفاده از روش بالا می‌توان ارتفاع بلندی‌های مختلف از جمله برج میدان آزادی تهران را اندازه گرفت.

مسائل

۱. در شکل زیر :



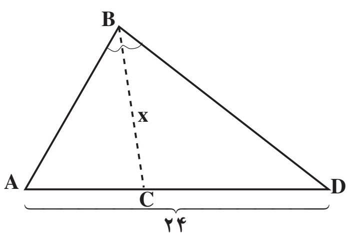


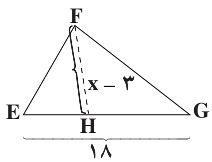
الف) اگر $DF = ۶\sqrt{۲}$ ، $DR = ۶$ و $AP = ۲$ ، طول AC را بیابید.

ب) اگر $BC = ۱۵$ ، $EF = ۲۱$ و $AP = ۴$ ، طول DR چقدر است؟

۲. اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت نیمسازهای نظیر در آن‌ها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

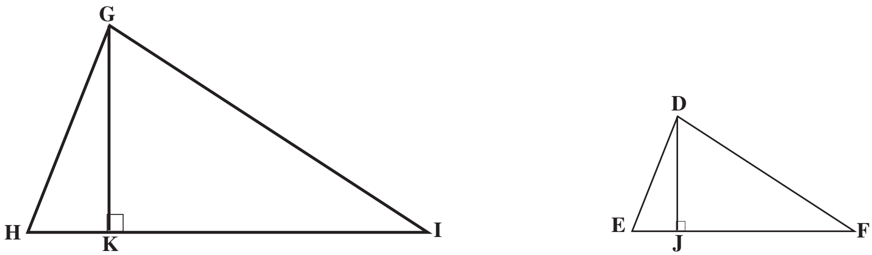
۳. در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند و BC نیمساز زاویه‌ی B و FH نیمساز زاویه‌ی نظیر B یعنیF است. با استفاده از مقادیر داده شده، x را حساب کنید.





۴. اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت میانه‌های نظیر در آن‌ها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

۵. در شکل زیر دو مثلث DEF و GHI متشابه‌اند و $GK=\frac{۳}{۲}DJ$. اگر $HI=۲۰$ طول EF را حساب کنید.

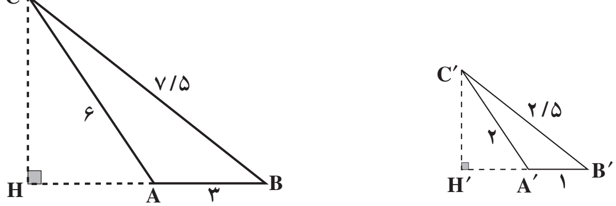


۳ـ ۶ ـ محیط و مساحت شکل‌های متشابه

نقشه‌ها تصویرهای مشابهی از وضعیت واقعی را نشان می‌دهند. در کنار هر نقشه معمولاً مقیاس آن نوشته می‌شود. برای مثال، اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{۱}{۵۰,۰۰۰}$ باشد، یعنی طول فاصله‌ها روی نقشه، ۵۰,۰۰۰ بار کوچک‌تر از فاصله‌ی واقعی است. به کمک مقیاس داده شده می‌توان اطلاعاتی از قبیل مساحت یک استان کشور، محیط یا طول خط مرزی یک استان، یا فاصله‌ی بین دو شهر را اندازه‌گیری کرد. چون نقشه با شکل واقعی کشور متشابه و مقیاس داده شده برای نقشه همان نسبت تشابه است، دانستن نسبت محیط‌ها و مساحت‌های شکل‌های متشابه برحسب نسبت تشابه اهمیت پیدا می‌کند.

مثال۸ : در شکل ۱۹ دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه هستند، زیرا ضلع‌های نظیر آن‌ها متناسبند. نسبت تشابه برابر است با

$$\frac{۳}{۱}=\frac{۶}{۲}=\frac{۷/۵}{۲/۵}=۳$$



شکل ۱۹

محیط مثلث ABC ، یعنی مجموع طول‌های ضلع‌های آن

$$۳+۶+۷/۵=۱۶/۵$$

و محیط مثلث $A'B'C'$

$$۱+۲+۲/۵=۵/۵$$

است. چون $۳ = \frac{۱۶/۵}{۵/۵}$ ، بنابراین

$$\text{نسبت تشابه} = ۳ = \frac{۱۶/۵}{۵/۵} = \frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}$$

پس در این دو مثلث، نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به محیط مثلث کوچک‌تر برابر با نسبت تشابه است.

مثال ۹ : در شکل ۱۹، ارتفاع‌های CH از مثلث ABC و $C'H'$ از مثلث $A'B'C'$ را رسم می‌کنیم. طبق نتیجه‌ی فعالیّت ۳ ــ ۲،

$$\frac{CH}{C'H'} = \text{نسبت تشابه} = ۳ \qquad (۱)$$

از طرفی

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲}CH \times AB$$

$$= \frac{۱}{۲}CH \times ۳$$

$$= \frac{۳}{۲}CH$$

همچنین :

$$\text{مساحت مثلث } A'B'C' = \frac{۱}{۲}C'H' \times A'B'$$

$$= \frac{۱}{۲}C'H' \times ۱ = \frac{۱}{۲}C'H'$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم که $CH = ۳C'H'$. بنابراین

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۳}{۲}CH = \frac{۹}{۲}C'H'$$

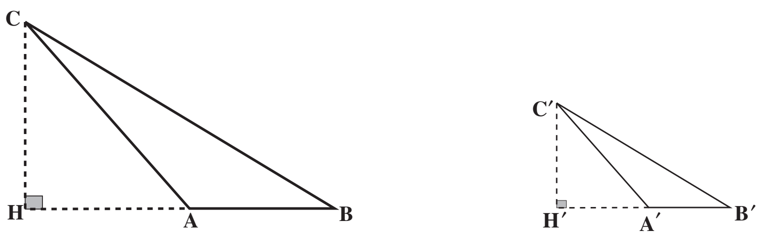
در نتیجه :

$$\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } A'B'C'} = \frac{\frac{۹}{۲}C'H'}{\frac{۱}{۲}C'H'}$$

$$= \frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۹ = ۳^۲$$

پس در این دو مثلث، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر، توان دوم نسبت تشابه است. آیا دو نتیجه‌ی به‌دست آمده از این دو مثال، برای هر دو مثلث متشابه درست است؟ یعنی آیا اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است؟

در شکل ۲۰ ، دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه‌اند. پس طبق تعریف تشابه



شکل ۲۰

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

محیط‌های این دو مثلث از جمع کردن طول‌های ضلع‌های آن‌ها به‌دست می‌آید. پس

$$\text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC$$

و

$$\text{محیط مثلث } A'B'C' = A'B' + A'C' + B'C'$$

بنابر ویژگی ۴ تناسب‌ها،

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}$$

یعنی :

در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه برابر است.

در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ،

$$\text{ABC مساحت مثلث} = \frac{1}{2} CH \times AB$$

$$\text{A'B'C' مساحت مثلث} = \frac{1}{2} C'H' \times A'B'$$

از طرفی

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CH}{C'H'}$$

درنتیجه :

$$\frac{\text{ABC مساحت مثلث}}{\text{A'B'C' مساحت مثلث}} = \frac{\frac{1}{2} CH \times AB}{\frac{1}{2} C'H' \times A'B'}$$

$$= \frac{CH \times AB}{C'H' \times A'B'}$$

$$= \left(\frac{CH}{C'H'}\right)\left(\frac{AB}{A'B'}\right)$$

$$= \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

چون $\frac{AB}{A'B'}$ همان نسبت تشابه دو مثلث است. به این ترتیب،

در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

مثال ۱۰: نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، ۱۶ است. نسبت محیط‌های آن‌ها را به‌دست آورید.

حل: اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد،

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = k^2$$

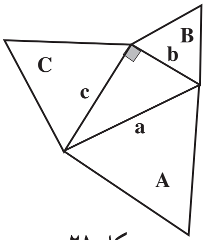
پس $k^2 = ۱۶$ و درنتیجه $k = ۴$. چون

نسبت تشابه = نسبت محیط‌ها

پس

۴ = نسبت محیط‌ها

مثال۱۱: مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a، b و c را در نظر بگیرید. آنگاه سه مثلث متساوی الاضلاع بر روی این سه ضلع بسازید (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

چه رابطه‌ای بین مساحت‌های سه مثلث متساوی‌الاضلاع A ، B و C وجود دارد؟

حل: چون مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ مجذور طول ضلع است، پس :

$$\text{مساحت A} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$\text{مساحت B} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}b^۲$$

$$\text{مساحت C} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}c^۲$$

از طرف دیگر، در هر مثلث قائم الزاویه، رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است،پس :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

دو طرف رابطه‌ی بالا را در $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}b^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}c^۲$$

چون

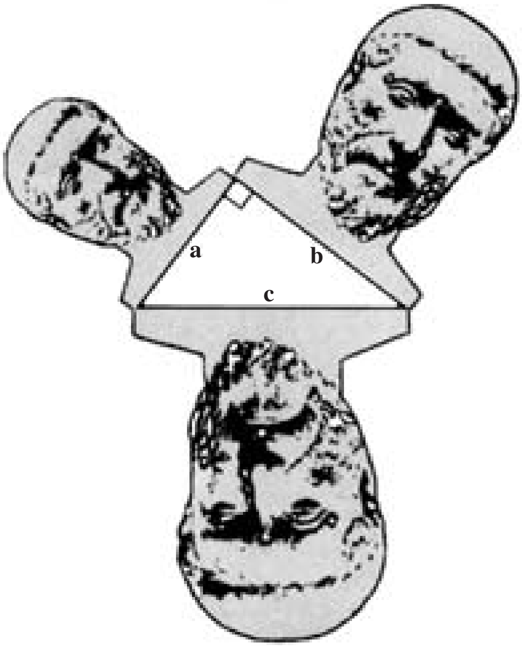
$$\text{مساحت A} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \text{ و } \text{مساحت B} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}b^۲ \text{ و } \text{مساحت C} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}c^۲$$

پس

$$\text{مساحت } C + \text{مساحت } B = \text{مساحت } A$$

بنابراین اگر به جای مربع‌هایی که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ساختیم، سه مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه بسازیم، باز هم همان رابطه بین مساحت‌ها برقرار است، یعنی مجموع مساحت‌های مثلث‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه برابر با مساحت مثلث ساخته شده روی وتر است.

آیا در مورد مساحت‌های هر سه شکل متشابهی که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود، باز هم رابطه‌ی فوق برقرار است؟ به آن فکر کنید![1]



شکل ۲۲

۱ــ مجسمه‌ی فیثاغورس در موزه‌ی کاپیتولینو در رُم (مأخذ : ژاکوب، ۱۹۷۳، صفحه ۴۱۲).

مجله‌ی ریاضی

در دو مثلث متشابه، نسبت اجزای[1] متناظر مانند ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌ها با نسبت تشابه برابر است و نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است. این مطلب در مورد هر دو شکل متشابه درست است. به طور کلی دو شکل را متشابه گویند هرگاه بین نقاط دو شکل، یک تناظر برقرار باشد و مثلثی که با هر سه نقطه از یک شکل ساخته می‌شود، با مثلثی که با سه نقطه‌ی متناظر از شکل دیگر ساخته می‌شود، متشابه باشد[2]. برای مثال، می‌توان دو چند ضلعی متشابه را به مثلث‌های متشابه تقسیم کرد و نتایج مربوط به مثلث‌های متشابه را برای آن‌ها به کار برد. بنابراین، در دو شکل متشابه، نسبت تمام اجزای آن مقدار ثابتی است که برابر با نسبت تشابه است. در نتیجه، نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

برای مثال، چون هر دو دایره با هم متشابه‌اند، می‌توان مساحت دایره O به شعاع r را به وسیله‌ی دایره‌ی O' به شعاع واحد محاسبه کرد :

$$\frac{\text{مساحت دایره‌ی } O}{\text{مساحت دایره‌ی } O'} = (\text{نسبت تشابه})^۲ = (\frac{r}{۱})^۲ = r^۲$$

و چون مساحت دایره‌ی واحد برابر π است،

$$\text{مساحت دایره به شعاع } r = \pi r^۲$$

با همین استدلال، در شکل ۲۲ (تصویر فیثاغورس) چون هر سه شکل متشابه‌اند (دلیل آن را توضیح دهید) پس :

$$\frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} = (\frac{b}{c})^۲ \qquad (۱)$$

$$\frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} = (\frac{a}{c})^۲ \qquad (۲)$$

۱ــ اجزای مورد نظر شامل زاویه‌ها نمی‌باشد.

۲ــ در این تعریف، منظور از شکل، مجموعه نقاطی از صفحه است که بر یک خط قرار ندارند.

از طرفی، طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل ۲۲،

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

دو طرف رابطه‌ی فوق را بر $c^۲$ تقسیم می‌کنیم؛

$$۱ = \frac{a^۲}{c^۲} + \frac{b^۲}{c^۲}$$

یا

$$۱ = (\frac{a}{c})^۲ + (\frac{b}{c})^۲ \qquad (۳)$$

رابطه‌ی (۱) و (۲) را در (۳) جایگزین می‌کنیم:

$$۱ = \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} + \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c}$$

از رابطه‌ی فوق مخرج مشترک می‌گیریم:

$$۱ = \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b + \text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c}$$

طبق خاصیّت تناسب، حاصل ضرب جمله‌های کناری برابر با حاصل ضرب جمله‌های میانی است. در نتیجه؛

مساحت شکل روی ضلع b + مساحت شکل روی ضلع a = مساحت شکل روی ضلع c

مسائل

۱. اگر ضلع‌های کوچک‌تر دو مثلث متشابه ۵ و ۶ سانتی‌متر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها را به‌دست آورید.

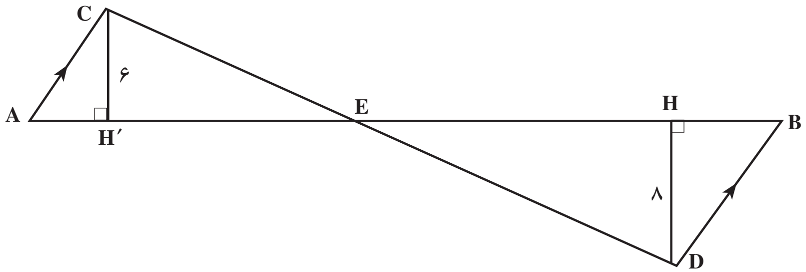
۲. مساحت‌های دو مثلث متشابه ۱۶ و ۲۵ سانتی‌متر مربع است. نسبت اضلاع متناظر را به دست آورید.

۳. در دو مثلث متشابه مساحت یکی ۱۱ برابر دیگری است. اگر طول یک ضلع از مثلث کوچک‌تر ۷ سانتی‌متر باشد، طول ضلع متناظر در مثلث بزرگتر را بیابید.

۴. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۸۱}{۱۲۱}$ است. نسبت محیط‌ها را پیدا کنید.

۵. محیط‌های دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ سانتی‌متر است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر، ۵۰ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر را بیابید.

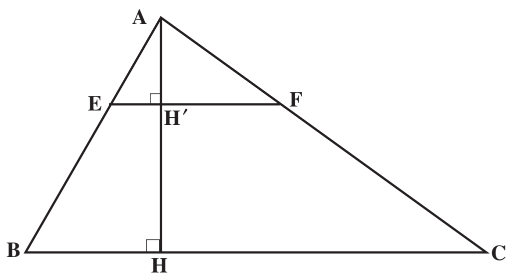
۶. با توجه به اندازه‌های روی شکل و $AB = ۳۵$ ، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) نسبت مساحت‌های مثلث‌های ACE و BDE را بیابید.

ب) مساحت مثلث BDE را به‌دست آورید.

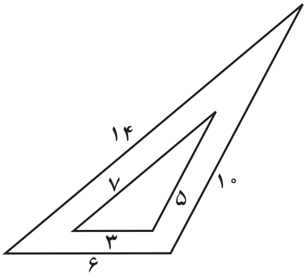
۷. در شکل زیر، $EF \| BC$. اگر نسبت مساحت‌های مثلث‌های AEF و ABC برابر $\frac{۱}{۶}$ باشد، نسبت ارتفاع‌های متناظر را به‌دست آورید.



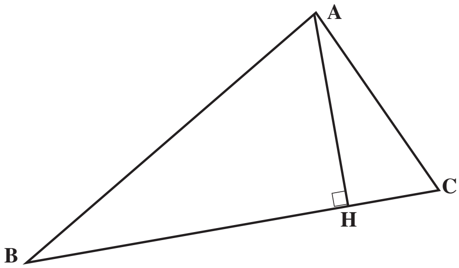
۸. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. اگر طول ضلع‌های مثلث ABC، ۵، ۸ و ۱۱ سانتی‌متر و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر ۶۰ سانتی‌متر باشد، طول ضلع‌های مثلث $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

۹. طول ضلع‌های مثلث ABC، ۷، ۹ و ۱۴ سانتی‌متر است. مثلث PQR با مثلث ABC متشابه است و طول بزرگ‌ترین ضلع آن ۲۱ سانتی‌متر است. محیط مثلث PQR را به دست آورید.

۱۰. در شکل زیر نسبت مساحت‌ها را بیابید.



۱۱. در شکل زیر زاویه‌ی BAC قائمه است و AH ارتفاع نظیر وتر می‌باشد مراحل زیر را در نظر بگیرید.



۱. مساحت مثلث ACH+ مساحت مثلث ABH = مساحت مثلث ABC

۲. $\frac{\text{مساحت مثلث ACH}}{\text{مساحت مثلث ABC}} + \frac{\text{مساحت مثلث ABH}}{\text{مساحت مثلث ABC}} = ۱$

۳. مثلث‌های ABC و ABH و ACH متشابه‌اند.

۴. $(\frac{AC}{BC})^۲ + (\frac{AB}{BC})^۲ = ۱$

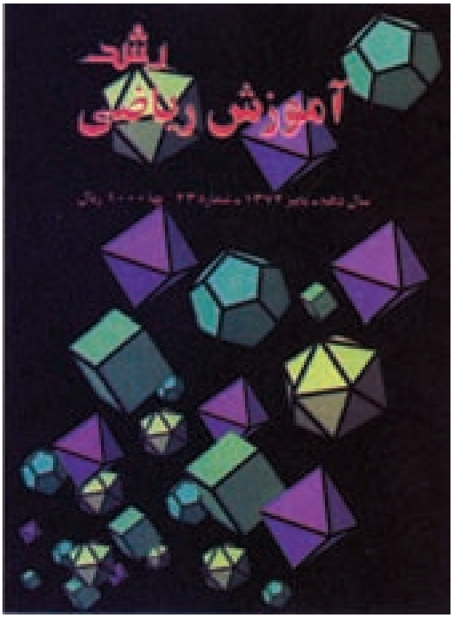
۵. $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$

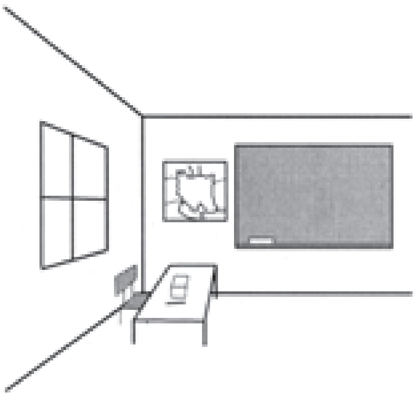
الف) دلیل درستی هر مرحله را توضیح دهید.

ب) آیا پنج مرحله بالا اثبات دیگری برای قضیه فیثاغورس است؟ (چرا؟).

فصل ۴

شکل‌های فضایی



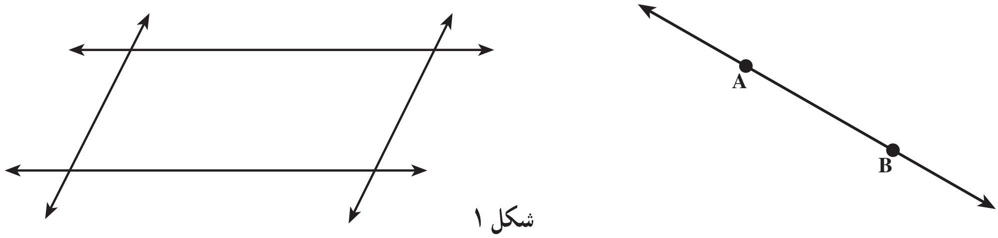


ما در فضای **سه بُعدی** زندگی می‌کنیم و اشیای اطراف ما، سه بُعدی هستند. کلاس درس یا اتاق منزلی که در آن زندگی می‌کنیم نمودهایی از فضای سه‌بُعدی هستند. میز و صندلی درون کلاس هم اشیای سه‌بُعدی می‌باشند.

در این فصل می‌خواهیم درباره‌ی بعضی از شکل‌های فضایی صحبت کنیم و ویژگی‌های مقدماتی آن‌ها را بشناسیم.

۴ـ۱ـ خط و صفحه در فضا

کلاس درس نمودی از فضای سه‌بُعدی است. سقف[1] و کف کلاس و هرکدام از دیوارهای آن نشان‌دهنده‌ی یک **صفحه** هستند. محل‌های تلاقی دیوارهای کلاس و کف آن یک **خط** در فضا تشکیل می‌دهند. صفحه‌ی کتاب یا دفترچه‌ای که روی آن می نویسید نیز نشان‌دهنده‌ی یک صفحه در فضا است و لبه‌های کتاب، خط‌هایی در صفحه هستند. همان‌طور که خط در فضا از دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از همه طرف در فضا نامحدود است.

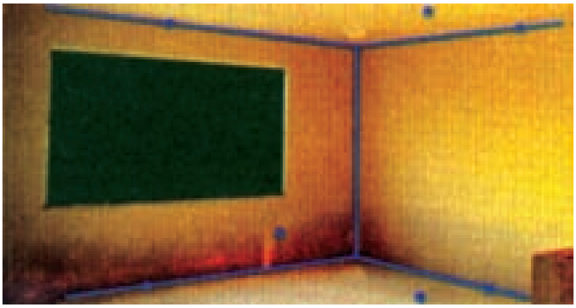


شکل ۱

دیوارهای کلاس یا صفحه‌ی کتاب بخش‌هایی از صفحه در فضا هستند. معمولاً یک صفحه را با متوازی‌الاضلاع نشان می‌دهیم.

> دو خط در یک صفحه موازی نامیده می‌شوند اگر هیچ نقطه‌ی اشتراکی نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند.

بار دیگر به کلاس درس خود نگاه کنید. لبه‌ی بالایی تخته سیاه یک خط در فضا است. اگر این خط را ادامه دهیم، سقف کلاس را قطع نمی‌کند. در این وضعیت می‌گوییم لبه‌ی بالایی تخته سیاه با سقف کلاس **موازی** است.

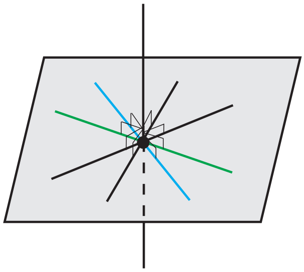


شکل۲

۱ـ سقف کلاس‌ها در همه‌ی مناطق ایران نشان‌دهنده‌ی یک صفحه نمی‌باشند. به عنوان مثال، سقف‌های گنبدی شکل مناطق کویری و سقف‌های بعضی مناطق شمال ایران به‌صورت یک صفحه نیستند.

یک خط و یک صفحه را که فقط یک نقطه‌ی اشتراک داشته باشند متقاطع گوییم. در غیر این صورت خط و صفحه موازیند.

حالا به خط قائم گوشه‌ی کلاس نگاه کنید. این خط برکف کلاس عمود است. خطی که یک صفحه را قطع می‌کند با خط‌هایی که درون صفحه قرار دارند و از نقطه‌ی تلاقی آن خط با صفحه می‌گذرند، زاویه تشکیل می‌دهد.

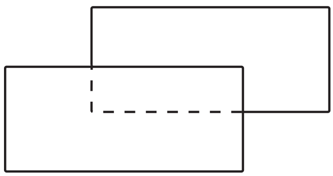


شکل۳

یک خط را بر یک صفحه عمود گوییم، اگر صفحه را قطع کند و با هر خطی در صفحه که از نقطه‌ی تلاقی می‌گذرد زاویه‌ی قائمه تشکیل دهد.

نکته: می‌توان نشان داد که در تعریف فوق عمودبودن خط بر حداقل دو خط متقاطع در صفحه کافی است.

دو دیوار روبه‌روی هم در کلاس، یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی بخش‌هایی از دو صفحه‌ی موازی هستند (شکل ۴).



شکل۴

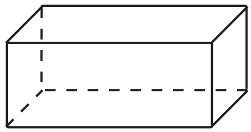
دو صفحه را موازی گویند، اگر یکدیگر را قطع نکنند یا بر هم منطبق باشند.

از طرف دیگر هریک از دیوارهای کلاس درس برکف کلاس عمود است.

دو صفحه را عمود بر هم می‌نامند، هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد که بر صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

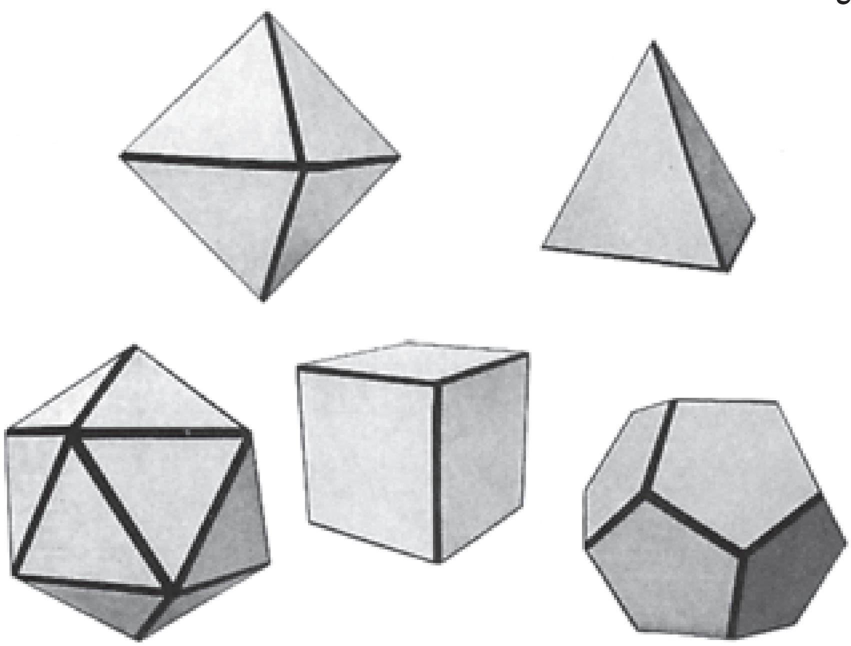


۴ـ۲ـ مکعب مستطیل



شکل۵

به شکل ۵ نگاه کنید. این شکلِ یک مکعب مستطیل است. در زندگی روزانه با اشیای بسیاری سروکار داریم که به شکل مکعب مستطیل هستند. جعبه‌ی خمیردندان، جعبه‌ی دستمال کاغذی، قوطی کبریت و بعضی از مدادپاکن‌ها نمونه‌هایی از مکعب مستطیل هستند. مکعب مستطیل شکل خاصی از **چندوجهی** است (شکل ۶).

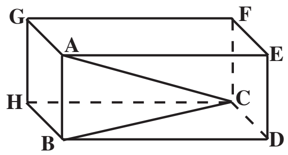


شکل ۶

بخشی از فضا که از همه طرف به صفحه محدود است شکلی پدید می‌آورد که به آن **چندوجهی** می‌گویند.

بخش هایی از صفحه‌ها که چندوجهی را پدید می‌آورند سطح‌هایی با محیط چندضلعی ایجاد می‌کنند. هرکدام از این چندضلعی‌ها[1] یک **وجه**، ضلع‌های این وجه‌ها، **یال‌ها** و رأس‌های این وجه‌ها، **رأس‌های** چندوجهی نامیده می‌شوند.

مکعب مستطیل یک شش وجهی است که همه‌ی وجه‌های آن مستطیل شکل هستند.



شکل ۷

وجه‌های روبه‌رو در مکعب مستطیل موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یال‌های آن بر وجه‌ها عمود هستند (شکل ۷). مکعب مستطیل، ۸ رأس و ۱۲ یال دارد.

در مکعب مستطیل به دو رأس مانند A و C در شکل ۷ که در یک وجه قرار ندارند، **رأس‌های متقابل** گفته می‌شود.

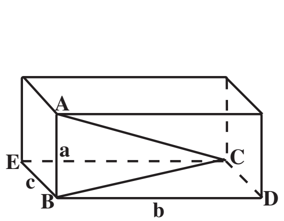
الف) در شکل ۷، A، B و C سه رأس مکعب مستطیل هستند. رأس‌های دیگر را نام ببرید.

ب) AB و CD دو یال این مکعب مستطیل هستند. یال‌های دیگر را نام ببرید.

پ) پاره‌خط AC، دو رأس متقابل A و C را به هم وصل کرده است. رأس‌های متقابل دیگر را نام ببرید.

در هر مکعب مستطیل، پاره‌خطی که دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کند، **قطر** مکعب مستطیل نامیده می‌شود.

فرض کنید طول یال‌های AB، BD و BE به‌ترتیب a، b و c باشد (شکل ۸). می‌خواهیم طول قطر AC را پیدا کنیم. چون یال AB بر وجه پایینی مکعب مستطیل عمود است، بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه و AC وتر آن است. پس با محاسبه‌ی طول وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC، طول AC یعنی قطر مکعب مستطیل به‌دست می‌آید.



شکل ۸

۱ــ در این‌جا منظور از چندضلعی، سطح چندضلعی است.

طول ضلع AB از مثلث ABC برابر a است ولی طول ضلع دیگر یعنی BC داده نشده است. اما چون مکعب مستطیل از وجه‌های مستطیل‌شکل تشکیل یافته است، پس $BE = CD = c$. مثلث BCD نیز قائم الزاویه است و BC وتر آن است. پس می‌توانیم از رابطه‌ی فیثاغورس طول BC را بیابیم :

$$BC^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

بنابراین :

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲}$$
$$= a^{۲} + (b^{۲} + c^{۲})$$
$$= a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}$$

درنتیجه :

$$AC = \sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}} \qquad (۱)$$

مثال ۱: طول یال‌های AB، BD و BE در مکعب مستطیل شکل ۸، به‌ترتیب ۱، ۲ و ۳ سانتی‌متر است. طول قطر AC را محاسبه کنید.

حل: با قراردادن $a = ۱$ ، $b = ۲$ و $c = ۳$ در رابطه‌ی (۱) طول AC را به‌دست می‌آوریم

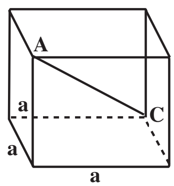
$$AC = \sqrt{۱ + ۴ + ۹} = \sqrt{۱۴}$$

مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن با هم برابر باشند، **مکعب** نامیده می‌شود.

مثال ۲: اگر طول یال‌های مکعبی برابر a باشد، طول قطر آن را پیدا کنید.

حل: چون طول یال‌ها برابر a است، پس در رابطه‌ی (۱) به‌جای a،b و c مقدار a را قرار می‌دهیم.

$$AC = \sqrt{a^{۲} + a^{۲} + a^{۲}} = \sqrt{۳a^{۲}} = a\sqrt{۳}$$



شکل ۹

مثال ۳: اگر طول یال مکعب را دو برابر کنیم، طول قطر آن چه تغییری می کند؟

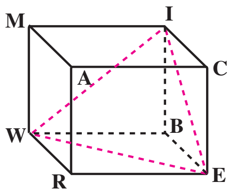
حل: اگر طول یال‌های مکعب شکل ۹ را دو برابر کنیم، آنگاه طول یال مکعب جدید، $۲\times a = ۲a$ خواهد بود. اگر قطر مکعب جدید را $A'C'$ بنامیم، به کمک رابطه‌ی (۱) طول آن‌را به‌دست می‌آوریم.

$$A'C' = \sqrt{(۲a)^۲ + (۲a)^۲ + (۲a)^۲}$$
$$= \sqrt{۳\times ۴a^۲}$$
$$= ۲a\sqrt{۳}$$
$$= ۲AC$$

درنتیجه، **اگر طول یال مکعب را دوبرابر کنیم، طول قطر آن نیز دوبرابر می‌شود.**

فعالیت ۴ــ۱

الف) به مکعب شکل ۱۰ نگاه کنید. این شکل را در دفتر خود رسم کنید.



شکل ۱۰

۱. در این مکعب رأس متقابلِ رأس I را نام ببرید.

۲. کدام‌یک از یال‌های این مکعب با یال MA موازی هستند؟

۳. این مکعب چند قطر دارد؟ آن‌ها را رسم کنید و نام ببرید.

ب) حال پاره‌خط‌های IE، WI و WE را نیز به شکلی که در دفتر خود رسم کرده‌اید اضافه کنید.

۴. اندازه‌ی زاویه‌های IWB و BWE را به‌دست آورید.

۵. اندازه‌ی زاویه‌ی IWE را به‌دست آورید.

۶. آیا رابطه‌ی $I\hat{W}E = I\hat{W}B + B\hat{W}E$ برقرار است؟ چرا؟

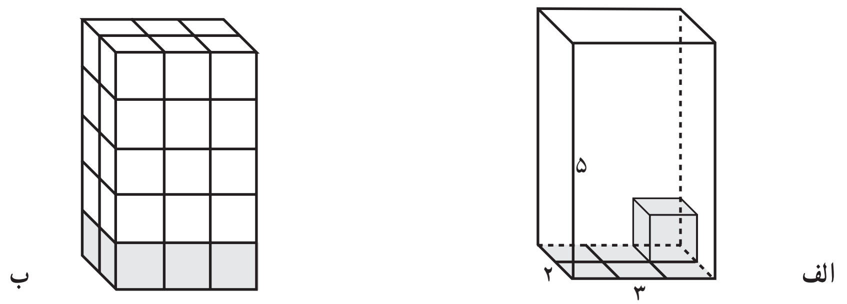
۷. اگر طول یال این مکعب ۸ سانتی‌متر باشد، طول پاره‌خط WI را حساب کنید.

در شکل ۱۰، WI، **قطر وجه** نامیده می‌شود.

آیا هنگام نوشیدن آب داخل یک لیوان، از خود پرسیده‌اید مقدار آبی که درون لیوان جای می‌گیرد چقدر است؟ یا هنگامی که بادکنکی را باد می‌کنید از خود پرسیده‌اید چه اندازه هوا داخل بادکنک جای می‌گیرد؟ یا گنجایش مخزن سوخت اتومبیل چقدر است؟

برای اندازه‌گیری طول یک پاره خط واحد طولی مثل سانتی‌متر، یا میلی‌متر انتخاب کردیم و با انتخاب آن واحدی نیز برای اندازه‌گیری مساحت مثل سانتی‌مترمربع یا میلی‌مترمربع به‌دست آوردیم. برای محاسبه‌ی حجم یک شکل فضایی نیز محتاج یک واحد هستیم. این واحد، حجم مکعبی با طول یال واحد است که برابر یک سانتی‌متر مکعب یا یک میلی‌مترمکعب (برحسب واحدی که برای اندازه‌گیری طول یال آن انتخاب می‌کنیم) در نظر گرفته می‌شود. همان‌طورکه برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل آن‌را با مربعهای واحد پوشاندیم، برای محاسبه‌ی حجم یک مکعب مستطیل آن‌را با **مکعب‌های واحد** (مکعب‌هایی با طول یال واحد) پر می‌کنیم و با شمارش تعداد آن‌ها یا کسری از آن‌ها، حجم مکعب مستطیل را می‌یابیم. مکعب مستطیل شکل ۱۱ــالف دارای یال‌هایی به طول‌های ۳ سانتی‌متر، ۲ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر است، که آن‌ها را طول، عرض و **ارتفاع** آن می‌نامند. این مکعب مستطیل را مانند شکل ۱۱ــب با مکعب‌های واحد پُر می‌کنیم. چون ارتفاع مکعب مستطیل ۵ است، ۵ ردیف از مکعب‌های واحد آن‌را پر می‌کنند. در هر ردیف نیز ۶ مکعب وجود دارد زیرا وجه پایینی این مکعب مستطیل، مستطیلی با طول ۳ سانتی‌متر و عرض ۲ سانتی‌متر است و مساحت مستطیل $۶ = ۳ \times ۲$ سانتی‌مترمربع است، بنابراین در هر ردیف ۶ مکعب واحد لازم خواهد بود. درنتیجه :

$$۲ \times ۳ \times ۵ = ۶ \times ۵ = ۳۰$$



شکل ۱۱

مکعب واحد برای پرکردن کل فضای داخل مکعب مستطیل لازم است. از این رو حجم این مکعب مستطیل ۳۰ سانتی‌مترمکعب است.

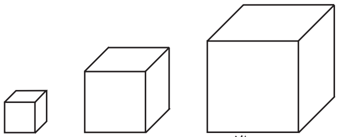
ارتفاع × عرض × طول = حجم مکعب مستطیل

طول و عرض مکعب مستطیل در واقع طول و عرض مستطیل وجه پایینی آن هستند که **قاعده‌ی** مکعب مستطیل نامیده می‌شود. چون مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول و عرض است، درنتیجه :

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم مکعب مستطیل

فعالیت ۴ـ۲

سه مکعب به طول یال‌های ۱، ۲ و ۳ سانتی‌متر مطابق شکل ۱۲ در نظر بگیرید.



شکل ۱۲

۱. مجموع مساحت‌های همه‌ی وجه‌های مکعب را به‌دست آورید و آن را مساحت کل بنامید.
۲. اگر طول یال یک مکعب را دو برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟
۳. اگر طول یال مکعبی را سه برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟
۴. حجم هرکدام از این مکعب‌ها را حساب کنید.
۵. اگر طول یال مکعبی دو برابر یا سه برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

مثال ۴: حجم مکعبی به طول یال a را پیدا کنید.

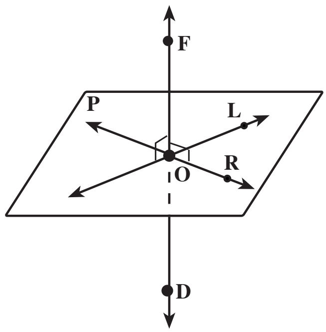
حل: چون طول و عرض و ارتفاع مکعب با هم برابرند، درنتیجه :

حجم مکعب = $(\text{طول یال})^۳ = a^۳$

مسائل

۱. نمایی از خط‌ها و صفحه‌هایی که در کلاس درس یا اتاق منزل خود می‌بینید در دفترچه خود رسم و خط‌های عمود بر صفحه‌ها را نام‌گذاری کنید. آنگاه، همه‌ی زاویه‌های قائمه‌ای را که تشکیل می‌شوند نام ببرید.

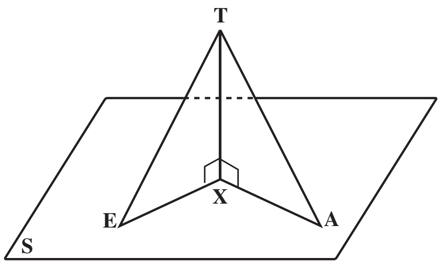
۲. در شکل زیر خط FD بر صفحه‌ی P عمود است و خط‌های OL و OR درون صفحه هستند :



الف) از عمود بودن خط بر صفحه، چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورید؟

ب) زاویه‌هایی را که قائمه هستند نام ببرید.

۳. در شکل زیر، پاره‌خط TX بر صفحه‌ی S عمود است و TE = TA . چرا زاویه‌ی TEX با زاویه‌ی TAX مساوی است؟

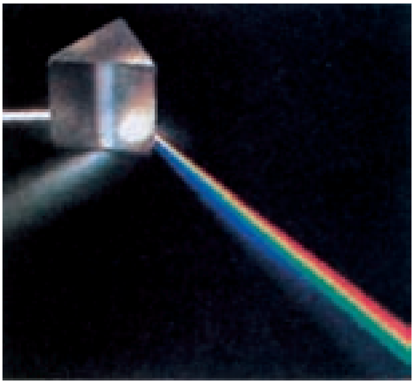


۴. حجم مکعب مستطیلی را که طول، عرض و ارتفاع آن $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ سانتی‌متر است به‌دست آورید.

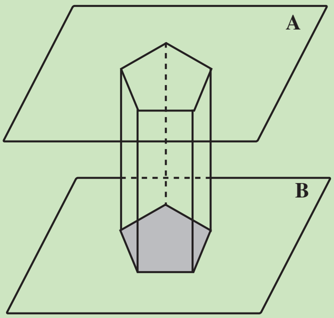
۵. اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{۶}$ باشد، مساحت کل آن‌را حساب کنید.

۴ــ۳ــ منشور و استوانه

به تصویر زیر نگاه کنید. این تصویر، نمونه‌هایی از یک **منشور** است.

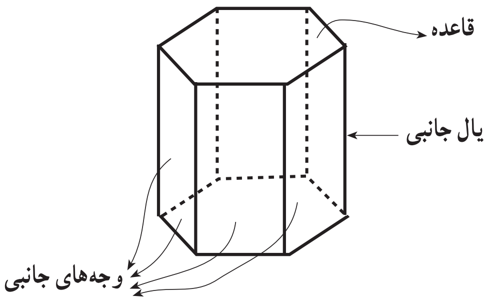


منشور یک چند وجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند.



شکل ۱۳

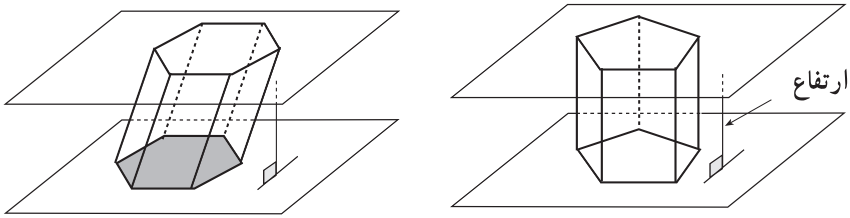
دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، **قاعده‌های منشور** نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی الاضلاع هستند، **وجه‌های جانبی** و یال‌هایی از منشور که محل تلاقی وجه‌های جانبی منشور هستند، **یال‌های‌جانبی** نامیده می‌شوند که همگی با هم



شکل ۱۴

موازیند. (شکل ۱۴) **ارتفاع منشور** پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.

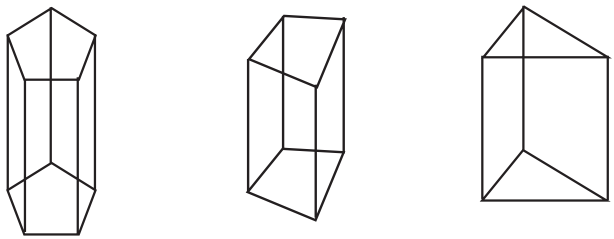
اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن‌را یک **منشور قائم** و اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌ها عمود نباشند آن‌را **منشور مایل** می‌نامند (شکل ۱۵).



منشور مایل   منشور قائم

شکل ۱۵

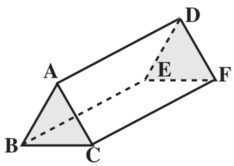
منشور را بر اساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند. مثلاً اگر قاعده‌ی یک منشور مثلث باشد، آن را **منشور مثلثی** می‌نامند. به این ترتیب، مکعب مستطیل یک منشور **چهارضلعی قائم** است. (چرا؟)



منشور پنج‌ضلعی   منشور چهارضلعی   منشور مثلثی

شکل ۱۶

فیزیکدان‌ها معمولاً به قطعه‌ی شیشه‌ای مثلث شکلی که می‌تواند نور را به طیف‌های آن تجزیه کند، **منشور** می‌گویند. این قطعه شیشه یک منشور مثلثی قائم است (شکل ۱۷).



شکل ۱۷

تمرین ۱: شکل ۱۷ یک منشور مثلثی است.

الف) قاعده‌های این منشور را نام ببرید.

ب) این منشور چند وجه جانبی دارد؟ وجه‌های جانبی آن چه شکلی دارند؟

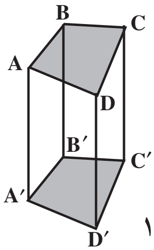
پ) یال‌های جانبی آن‌را نام ببرید.

تمرین ۲: در شکل ۱۸ یک منشور چهارضلعی قائم می‌بینید.

الف) این منشور چند وجه دارد؟

ب) وجه‌های آن چه شکلی دارند؟

پ) یال‌هایی از این منشور را که موازیند، نام ببرید.



شکل ۱۸

می‌توان مجموع مساحت وجه‌ها را برای هر منشور دلخواه نیز مانند مساحت کل مکعب مستطیل به‌دست آورد.

> مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را **مساحت جانبی** و مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده‌ی منشور، **مساحت کل** آن نامیده می‌شود.

فعالیت ۴ــ۳

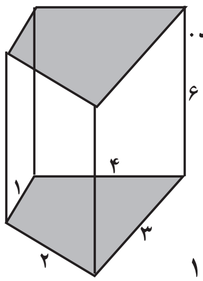
طول ضلع‌های قاعده‌ی منشور شکل ۱۹، به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ واحد و طول یال‌های جانبی آن ۶ واحد است.

۱. مساحت هریک از وجه‌های جانبی این منشور را به‌دست آورید.

۲. مساحت جانبی منشور چقدر است؟

۳. محیط قاعده را به‌دست آورید و آن‌را در طول یال جانبی ضرب کنید.

۴. از مقایسه‌ی پاسخ سؤال‌های ۲ و ۳ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



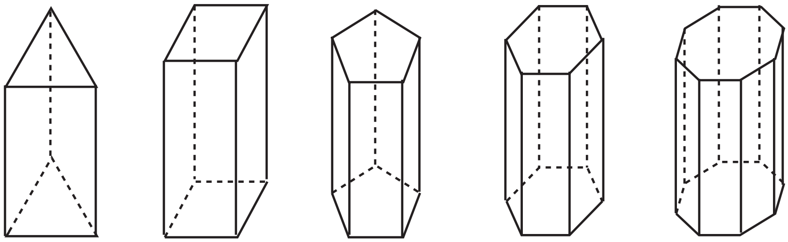
شکل ۱۹

۵. اگر طول یال جانبی یک منشور قائم h و محیط قاعده‌ی آن p[۱] باشد برای محاسبه مساحت جانبی منشور چه فرمولی پیشنهاد می‌کنید؟

۶. اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل یعنی یک منشور چهارضلعی قائم a، b و c باشند، به کمک نتیجه‌ی سؤال ۵، فرمولی برای پیدا کردن مساحت جانبی مکعب مستطیل به‌دست آورید.

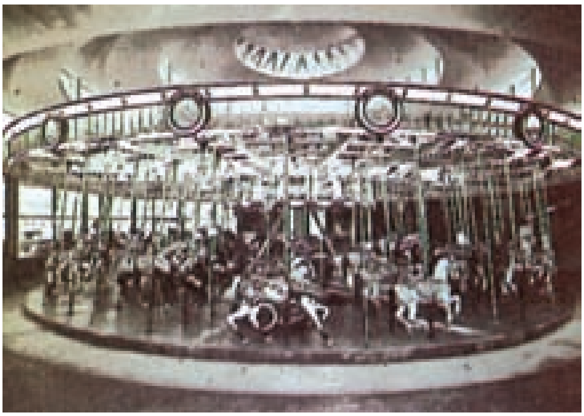
۷. مساحت کل مکعب مستطیل سؤال ۶، برحسب a، b و c چقدر است؟

یک دسته از منشورهای جالب آن‌هایی هستند که قاعده‌ی آن‌ها چندضلعی منتظم است (شکل ۲۰).



شکل ۲۰

هرچه تعداد ضلع‌های چند ضلعی منتظم بیشتر می‌شود، قاعده‌ی منشور به دایره نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. اگر تعداد ضلع‌های چند ضلعی خیلی زیاد شود، هرکدام از وجه‌ها باریک و باریک‌تر می‌گردند تا تقریباً شبیه به یک خط می‌شوند و قاعده‌های منشور بیشتر و بیشتر شبیه دایره می‌شوند. درنتیجه منشور حاصل به یک شکل فضایی که قاعده‌ی آن دایره است تبدیل می‌شود. این شکل فضایی را **استوانه** می‌نامند.



شکل ۲۱

۱ــ Premeter محیط

بسیاری از وسایلی که در زندگی روزانه با آن‌ها سر و کار داریم، استوانه‌ای‌شکل هستند. بعضی از لیوان‌های آب‌خوری، پیستون موتور اتومبیل‌ها و لوله‌های آب همگی استوانه‌اند.

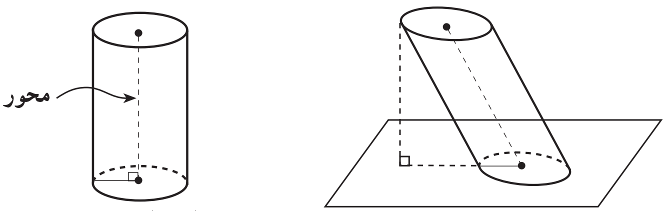


شکل ۲۲

آیا شما نیز می‌توانید چند شیء استوانه‌ای شکل را نام ببرید؟

استوانه[۱] شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چند ضلعی، دو دایره‌ی همنهشت هستند.

اگر **محور استوانه** یعنی، پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، بر قاعده عمود باشد، استوانه را قائم و در غیر این صورت آن‌را مایل می‌نامند (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

توجه: در استوانه قائم، محور استوانه همان ارتفاع استوانه است.

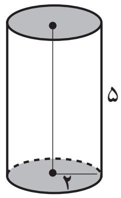
همانند منشور، مساحت رویه‌ای (سطحی[۲]) که اطراف استوانه را تشکیل می‌دهد، مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده مساحت کل نامیده می‌شود.

۱ــ عمداً از آوردن تعریف دقیق ریاضی پرهیز کرده‌ایم.

۲ــ Surface (سطح ــ رویه)

فعالیت ۴ــ۴

طول محور یعنی طول ارتفاع استوانه قائم شکل ۲۴ برابر ۵ سانتی‌متر و شعاع قاعده‌ی آن ۲ سانتی‌متر است. قاعده‌های این استوانه را بردارید و از کنار، آن‌را به موازات محور برش داده و باز کنید، یک مستطیل به‌دست می‌آید.



شکل ۲۴

۱. طول و عرض مستطیل حاصل چقدر است؟

۲. مساحت مستطیل را به‌دست آورید.

۳. مساحت این مستطیل چه رابطه‌ای با مساحت جانبی استوانه دارد؟

۴. با توجه به پاسخ سؤال ۳، مساحت جانبی استوانه چیست؟

۵. به همین روش، مساحت جانبی یک استوانه با ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی r را به‌دست آورید.

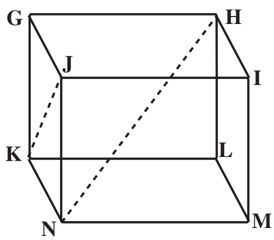
۶. مساحت هریک از دایره‌های استوانه‌ی شکل ۲۴ چقدر است؟

۷. مساحت کل استوانه را حساب کنید.

۸. به کمک پاسخ سؤال‌های ۶ و ۷، مساحت کل استوانه‌ی سؤال ۵ را محاسبه کنید.

مسائل

۱. طول هر یال مکعب شکل زیر ۶ سانتی‌متر است.



الف) طول JK یعنی قطر وجه GJNK چقدر است؟

ب) طول قطر HN چقدر است؟

۲. طول قطر وجه یک مکعب ۱۰ سانتی‌متر است. مساحت کل آن‌را حساب کنید.

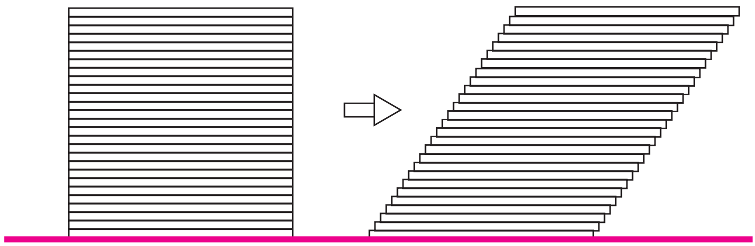
۳. اگر قاعده‌ی یک منشور قائم، مثلث متساوی الاضلاعی به‌طول ضلع ۸ سانتی‌متر و ارتفاع منشور ۱۲ سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را پیدا کنید.

۴. طول ضلع قاعده‌ی یک منشور قائم شش‌ضلعی منتظم ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع منشور ۱۸ سانتی‌متر است. مساحت جانبی و مساحت کل آن‌را پیدا کنید.

۵. چرا ارتفاع یک منشور مایل کوتاهتر از طول یال جانبی آن است؟

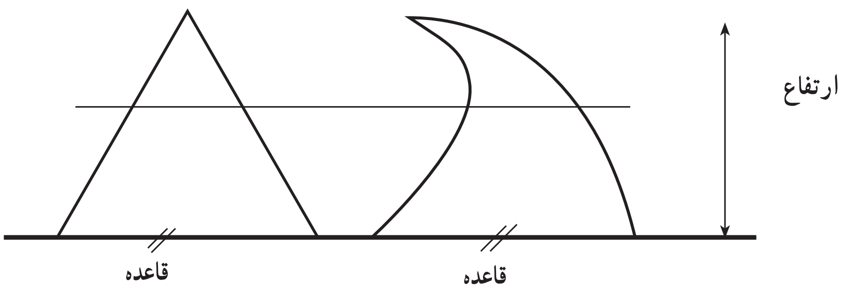
۴ــ ۴ــ اصل کاوالیری، حجم منشور و استوانه

یک دسته کارت هم‌اندازه را روی یکدیگر قرار دهید و از پهلو به آن نگاه کنید. یک سطح مستطیل شکل ایجاد شده است. اگر این دسته کارت را به‌آرامی فشار دهید و مجدداً از پهلو به آن نگاه کنید، یک متوازی‌الاضلاع دیده می‌شود. این متوازی‌الاضلاع و مستطیل دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند درنتیجه مساحت آن‌ها مساوی است. قاعده‌های متوازی‌الاضلاع و مستطیل شکل ۲۵ بر روی یک خط قرار دارند. هر خطی که به موازات قاعده این دو شکل را قطع کند، در آن‌ها طول‌های مساوی ایجاد می‌کند.



شکل ۲۵

دو شکل زیر دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند و هر خطی موازی با قاعده‌ها، در دو شکل قطعه‌هایی با طول‌های مساوی به وجود می‌آورد.



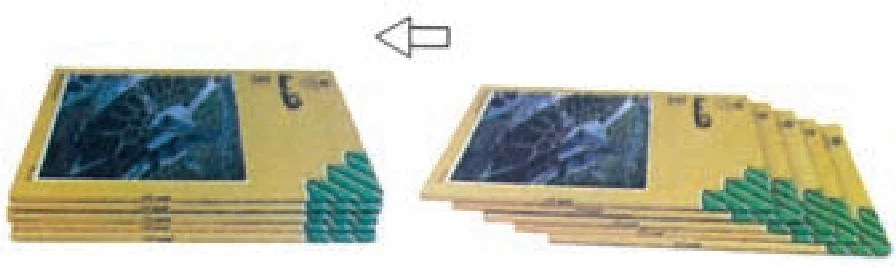
شکل ۲۶

طبق اصل کاوالیری[1]، چنین دو شکلی دارای مساحت‌های برابر هستند.

اصل کاوالیری درباره‌ی مساحت‌ها

فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند. اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آن‌ها قطعه‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کند، مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

کتاب‌های هندسه‌ی خود و دوستانتان را طوری روی هم قرار دهید که مانند شکل ۲۷ یک منشور مستطیلی مایل ایجاد شود. کتاب‌ها را از کنار به‌آرامی با دست فشار دهید تا به‌صورت قائم روی یکدیگر قرار گیرند. با این کار، مساحت کتاب‌ها و ارتفاع منشور تغییر نمی‌کند ولی یک منشور مستطیلی قائم به‌دست می‌آید.



شکل ۲۷

اگر حجم منشور مایل را برابر مجموع حجم‌های این کتابهای هم‌اندازه بگیریم، نباید با فشاردادن کتاب‌ها و تبدیل منشور مایل به قائم، حجم آن تغییر کند. همچنین مساحت هرکدام از کتاب‌های فوق یعنی S[2] و ارتفاع منشور یعنی h نیز با فشاردادن تغییر نمی‌کنند. بنابراین،

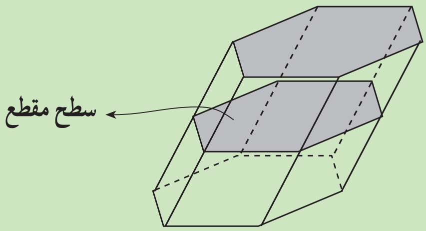
$$\text{حجم منشور مستطیلی مایل} = S\times h$$

$$V = S\times h$$ [3]

از تساوی حجم دو منشور قائم و مایل، به بیان اصل کاوالیری برای حجم‌های شکل‌های فضایی مانند آنچه برای مساحت‌های دو شکل مسطّح بیان کردیم می‌پردازیم. امّا قبل از آن، نیازمند تعریف زیر هستیم :

۱ـ Cavalieri　　۲ـ Surface　　۳ـ Volume

سطح مقطع یک شکل فضایی، شکلی است که از برخورد آن با یک صفحه حاصل می‌شود.



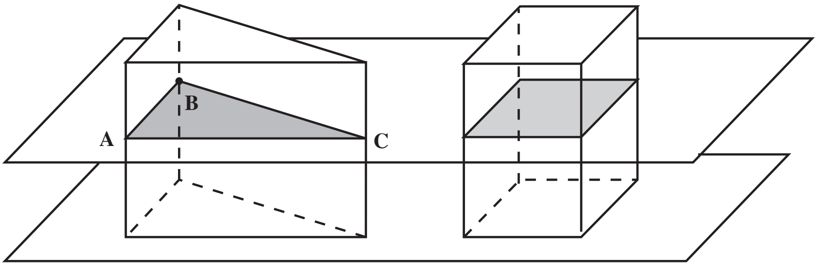
اگر قاعده‌های دو منشور در یک صفحه قرار گرفته و مساحت سطح مقطع‌هایی که از برخورد هر صفحه‌ای موازی با این صفحه حاصل می‌شوند برابر باشند، آنگاه نتیجه می‌گیریم که حجم‌های این دو منشور برابر هستند. این مطلب را نخستین بار، کاوالیری، ریاضیدان ایتالیایی قرن هفدهم، به‌صورت کلی‌تری بیان کرد.

اصل کاوالیری درباره‌ی حجم‌ها

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل دارای مساحت‌های برابر باشند، آنگاه حجم‌های این دو شکل فضایی برابر هستند.

طبق اصل کاوالیری، اگر مساحت قاعده‌های دو منشورِ هم ارتفاع برابر باشند، حجم‌های آن‌ها برابر خواهند بود.

حجم منشور برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

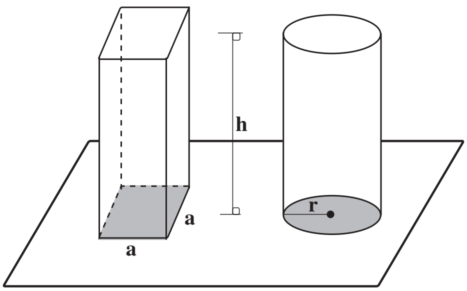


مثال ۵: در شکل صفحه‌ی قبل مساحت‌های مربع و مثلث که قاعده‌های دو منشور را تشکیل می‌دهند، همچنین ارتفاع دو منشور برابر هستند. هر صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی P یک منشور را در مربع و منشور دیگر را در یک مثلث قطع می‌کند که باز دارای مساحت‌های برابر هستند. پس بنابر اصل کاوالیری، حجم‌های این دو منشور برابرند. یکی از این منشورها یک مکعب مستطیل است و حجم آن برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است. پس حجم منشور دیگر نیز برابر با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن می‌باشد. درنتیجه، اگر **h** ارتفاع و **S** مساحت قاعده‌ی هر منشوری باشد، حجم آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$V = S \times h$$

فعالیت ۴ـ۵

در شکل ۲۸ استوانه‌ی قائمی که شعاع دایره‌ی قاعده‌ی آن r و ارتفاع آن h است و یک منشور چهارضلعی قائم به همان ارتفاع رسم شده است .



شکل ۲۸

۱. اگر مساحت قاعده‌های استوانه و منشور شکل ۲۸ برابر باشند، اندازه‌ی طول ضلع مربع یعنی a را بر حسب r به‌دست آورید.

۲. با مقداری که برای a در قسمت ۱ به‌دست آورده‌اید، حجم منشور را حساب کنید.

۳. با توجّه به اصل کاوالیری، حجم استوانه‌ی قائم را به‌دست آورید.

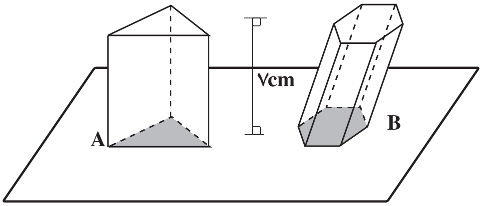
۴. آیا حجم استوانه‌ی مایل نیز مانند حجم استوانه‌ی قائم به‌دست می‌آید؟ توضیح دهید.

مسائل

۱. با استفاده از اصل کاوالیری نشان دهید دو مثلث با قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر، مساحت برابر دارند (از قانون مساحت مثلث استفاده نکنید).

(**راهنمایی:** از تشابه مثلث‌ها استفاده کنید.)

۲. در شکل زیر، قاعده‌های یک منشور سه‌ضلعی قائم (A) و یک منشور شش‌ضلعی مایل (B) در یک صفحه قرار گرفته‌اند. ارتفاع هر دو منشور ۷ سانتی‌متر است.

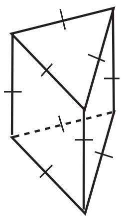


الف) اگر مساحت قاعده‌ی منشور A، ۱۰ سانتی‌متر مربع باشد، حجم آن چقدر است؟

فرض کنید هر صفحه‌ای موازی با قاعده‌های این دو منشور، سطح مقطع‌هایی با مساحت برابر ایجاد کند:

ب) حجم منشور B را به‌دست آورید.

۳. طول هر یال منشور قائم شکل روبه‌رو ۴ سانتی‌متر است.



الف) مساحت هرکدام از وجه‌ها و قاعده‌ها را حساب کنید.

ب) ارتفاع منشور چقدر است؟

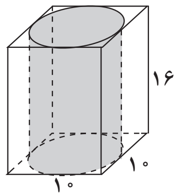
پ) حجم منشور را به‌دست آورید.

۴. دو استوانه‌ی قائم یکی به شعاع قاعده‌ی ۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۱ سانتی‌متر و دیگری به شعاع قاعده‌ی ۱ سانتی‌متر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید.

الف) مساحت‌های جانبی این دو استوانه را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

ب) حجم‌های این دو استوانه را پیدا کرده با هم مقایسه کنید.

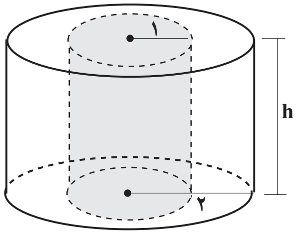
۵. در شکل روبه‌رو طول ضلع مکعب مستطیل ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۶ سانتی‌متر است.



الف) مساحت کل و حجم استوانه را به‌دست آورید.

ب) حجم ناحیه‌ی بین استوانه و مکعب مستطیل چقدر است؟

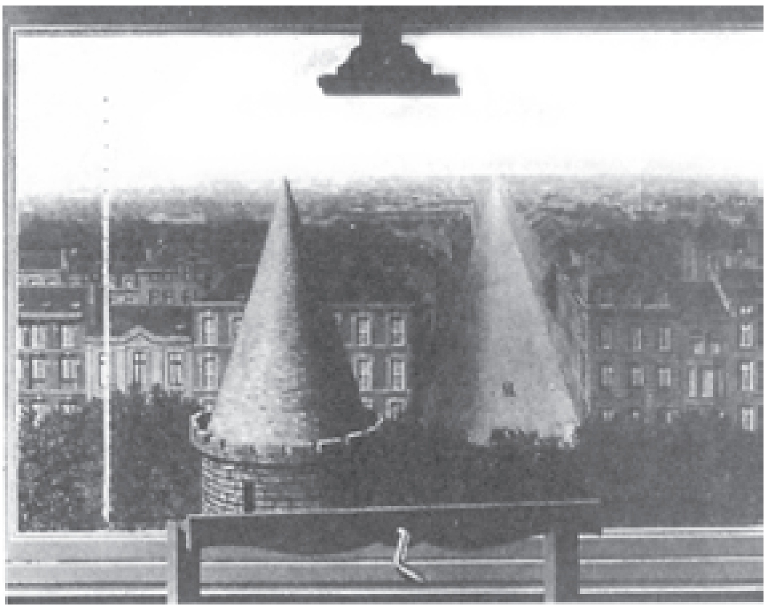
۶. دو استوانه‌ی قائم که مرکز قاعده‌های آن‌ها یکی است، را در نظر بگیرید. با توجه به اندازه‌های روی شکل :



الف) نسبت مساحت جانبی استوانه‌ی بزرگتر به مساحت‌جانبی استوانه‌ی کوچکتر را بیابید.

ب) نسبت حجم استوانه‌ی بزرگتر به حجم استوانه‌ی کوچکتر چقدر است؟

پ) حجم فضای بین این دو استوانه را پیدا کنید.



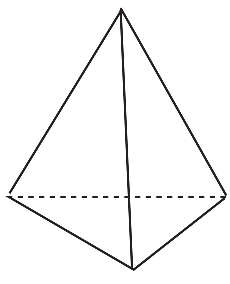
درباره‌ی اثر معروف رنه ماگریت با عنوان گردش‌گاه اقلیدوسی فکر کنید، در آن چه می‌بینید؟

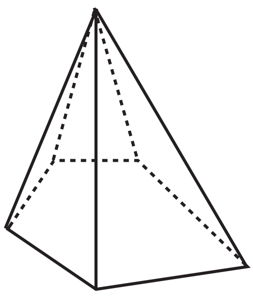
۴ـ۵ ـ هرم و مخروط

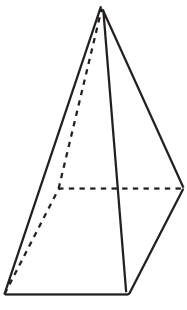
یکی از بزرگترین شکل‌های فضایی ساخت دست بشر، اهرام مصر است که بیش از چهارهزار سال از عُمر آن می‌گذرد و تنها مورد از «عجایب هفتگانه» است که هنوز پا برجا می‌باشد. هرکدام از این هرِم‌ها، ارتفاعی به اندازه‌ی یک ساختمان چهل طبقه دارد و بر روی هم با بیش از دو میلیون قطعه سنگ که وزن هرکدام بین ۲ تا ۱۵۰ تُن است ساخته شده‌اند.



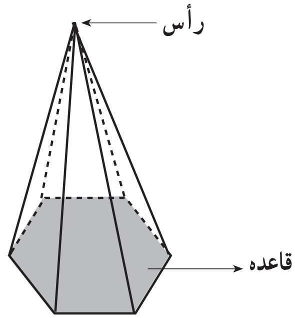
اگرچه مصریان باستان هرم‌هایی ساختند که قاعده‌ی آن‌ها به شکل مربع بود، ولی چندضلعی‌های دیگر نیز می‌توانند قاعده‌ی یک هرم باشند.


هرم مثلثی


هرم پنج‌ضلعی


هرم مربعی

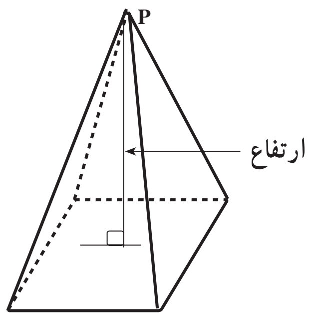
هرم یک چندوجهی است که همه‌ی وجه‌های آن به جز یکی در یک رأس مشترک‌اند.



شکل ۲۹

وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد قاعده‌ی هرم و وجه‌های دیگر وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند. وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند. (چرا؟)

ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از **رأس** هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.



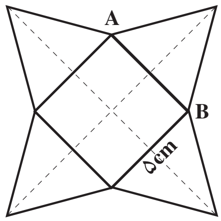
قاعده‌های هرم‌های معروف مصر، چهارضلعی‌های منتظم (مربعی شکل) هستند.

اگر قاعده‌ی یک هرم، چند ضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را **منتظم** می‌نامیم.

توجه: مرکز چند ضلعی منتظم، مرکز دایره‌ای است که از رأس‌های این چند ضلعی می‌گذرد.

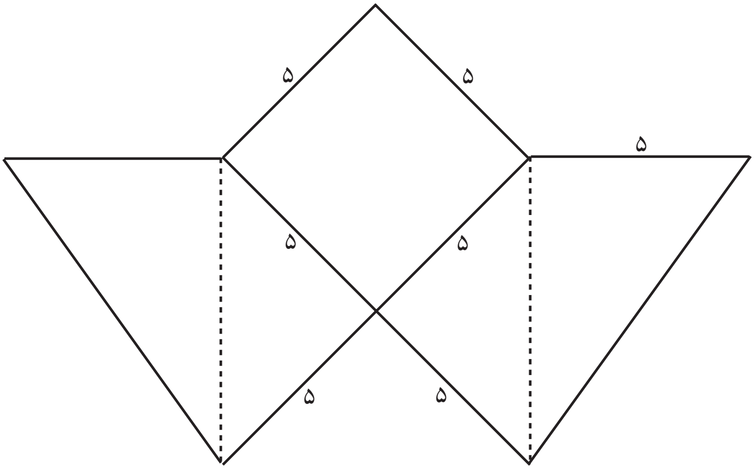
فعالیت ۴ــ۶

۱. ارتفاع مثلث‌ها در شکل ۳۰ چقدر باشد تا هرِم به‌دست آمده ارتفاعی برابر ۲/۵ سانتی‌متر داشته باشد؟

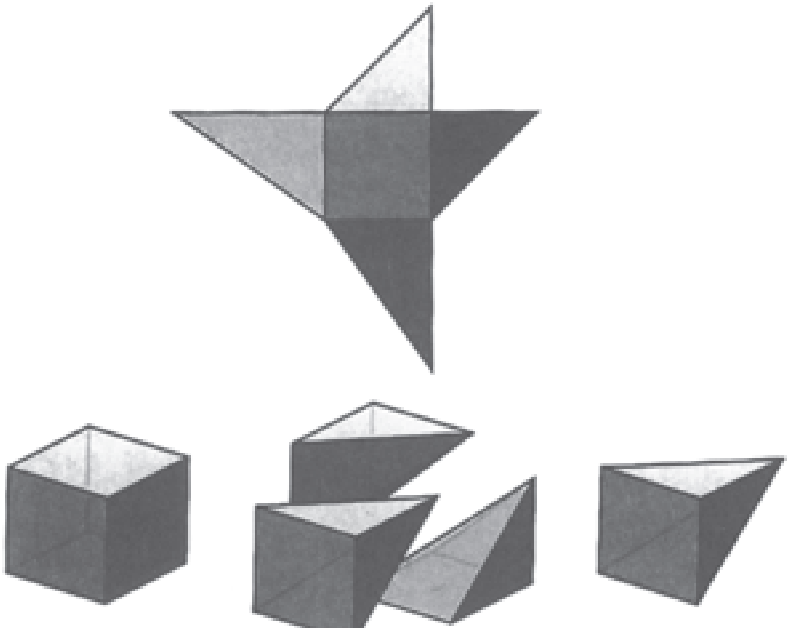


شکل ۳۰

۲. طول بزرگترین ضلع در الگوی زیر چند واحد است؟

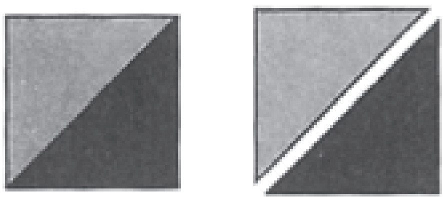


سه قطعه مقوا مطابق الگوی فوق برش دهید و سه هرم بسازید. هرم‌ها را طوری کنار هم قرار دهید تا یک مکعب به‌دست آید. چه نتیجه‌ای درباره‌ی حجم مکعب و هرم‌ها می‌گیرید؟ حجم هرم، برحسب حجم مکعب چقدر است؟



شکل ۳۱

در فعالیت فوق، سه هرم را کنار هم گذاشتید و یک مکعب که خود یک منشور است ساختید. این کار مانند آن است که یک مکعب را به سه هرم با حجم‌های مساوی تجزیه[1] کنیم. قبلاً نیز برای محاسبه‌ی مساحت مثلث، یک متوازی‌الاضلاع یا مستطیل را به دو مثلث هم مساحت تجزیه کردیم.



شکل ۳۲

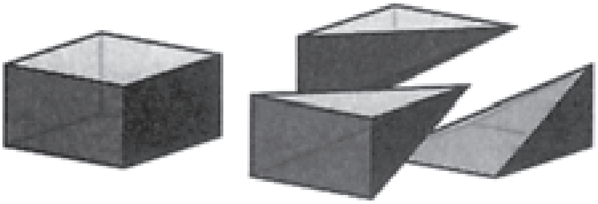
با استفاده از ایده‌ی تجزیه‌ی شکل‌ها، می‌توان حجم هرم را در حالت کلی محاسبه کرد. با پذیرفتن این موضوع که دو هرم با سطح قاعده‌ها و ارتفاع‌های مساوی دارای حجم‌های یکسان هستند[2]، کافی است که حجم یک هرم با قاعده‌ی مربع را پیدا کنیم زیرا برای هر هرم دیگری می‌توان هرمی با قاعده‌ی مربع ساخت که مساحت قاعده و ارتفاع آن با مساحت قاعده و ارتفاع آن هرم برابر باشد[3]. برای این منظور مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌ی آن همان قاعده‌ی هرم فوق و ارتفاع آن

۱ــ Decomposition

۲ــ در این کتاب، این مطلب را بدون اثبات می‌پذیریم.

۳ــ اگر مساحت قاعده‌ی هرم اولیه S باشد کافی است هرمی با قاعده‌ی مربع به طول ضلع $\sqrt{S}$ بسازیم.

نیز با ارتفاع هرم برابر باشد. این مکعب مستطیل را به سه هرم تجزیه می کنیم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

این سه هرم همنهشت نیستند ولی دارای حجم‌های مساوی هستند.[۱] چون حجم مکعب مستطیل مساوی مجموع حجم این سه هرم است. بنابراین،

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}\,(\text{حجم مکعب مستطیل})$$

$$= \frac{۱}{۳}(S \times h)$$

که S مساحت قاعده‌ی هرم و h ارتفاع آن است.

حجم هرمی به مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h برابر است با

$$V = \frac{۱}{۳} S \times h$$

همان‌طور که با زیاد کردن تعداد ضلع‌های قاعده‌ی یک منشور که چندضلعی منتظم بود شکل قاعده به دایره نزدیک و نزدیک‌تر شد و به این ترتیب استوانه را به‌دست آوردیم، با انجام همین عمل در مورد هرمهای منتظم نیز یک شکل فضایی به نام **مخروط** به‌دست می‌آید. اگر نگاهی به اطراف خود بیندازید، اشیای مخروطی شکل بسیاری می‌بینید.



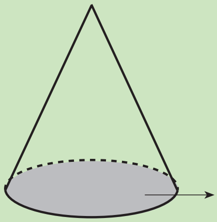
بستنی قیفی



کلاه مخروطی

۱ــ اثبات این مطلب خارج از برنامه‌ی این درس است.

مخروط[1] شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به جای چند ضلعی، دایره است.



رأس، قاعده و ارتفاع یک مخروط مانند هرم تعریف می‌شوند. پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره‌ی قاعده وصل می‌کند، محور مخروط نام دارد. اگر محور بر قاعده عمود باشد، مخروط، **قائم** و در غیر این صورت **مایل** نامیده می‌شود (شکل ۳۴).



شکل ۳۴

حجم یک مخروط را می‌توان با حجم یک هرم با قاعده‌ی چند ضلعی منتظم تقریب زد :

حجم مخروط[2] $\approx \frac{۱}{۳}$ (مساحت قاعده) ارتفاع

هر اندازه تعداد ضلع‌های این چند ضلعی بیشتر گردد، مساحت قاعده‌ی هرم به مساحت قاعده‌ی مخروط نزدیکتر می‌شود و درنتیجه، حجم هرم به حجم مخروط نزدیکتر می‌گردد. بنابراین،

حجم یک مخروط با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با

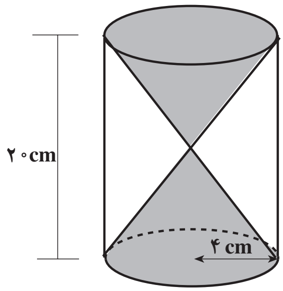
$$V = \frac{۱}{۳} \times \pi r^{۲} \times h$$

۱ــ عمداً از آوردن تعریف دقیق ریاضی پرهیز کرده‌ایم.

۲ــ علامت ≈ را بخوانید : تقریباً برابر است با

مسائل

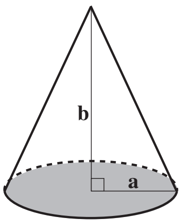
۱. ساعت شنی که مردمان باستان برای اندازه‌گیری زمان از آن استفاده می‌کردند، از دو مخروط یکسان که درون یک استوانه‌ی قائم قرار داشتند ساخته شده بود. فرض کنید ارتفاع استوانه ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده‌ی آن ۴ سانتی‌متر است.



الف) حجم ناحیه‌ی سایه زده شده در شکل را پیدا کنید.

ب) حجم ناحیه‌ی محصور بین دو مخروط و استوانه را محاسبه کنید.

۲. شعاع قاعده‌ی یک مخروط a و ارتفاع آن b است. برای هرکدام از موارد زیر عبارتی برحسب a و b پیدا کنید :



الف) حجم مخروط ؛

ب) حجم مخروطی با همین شعاع قاعده اما ارتفاع دو برابر ؛

پ) حجم مخروطی با همین ارتفاع اما شعاع قاعده‌ی دو برابر ؛

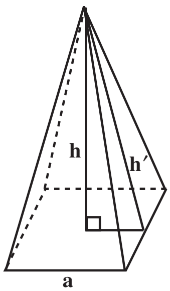
ت) حجم مخروطی با ارتفاع دو برابر و شعاع قاعده‌ی دو برابر.

۳. حجم مخروط چه تغییری می‌کند اگر :

الف) ارتفاع آن دو برابر شود، اما شعاع قاعده تغییر نکند ؛

ب) شعاع قاعده دو برابر شود، ولی ارتفاع تغییر نکند.

۴. حجم هرم مربعی منتظم در شکل مقابل را با توجه به داده‌های زیر به‌دست آورید :



الف) $a = ۱۴cm$, $h' = ۲۵cm$ ؛

ب) $h = ۶cm$, $h' = ۶/۵cm$ ؛

پ) $a = ۱cm$, $h = ۱/۳cm$.

۵. یک چهاروجهی را که همه‌ی وجه‌های آن مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a می‌باشد درنظر بگیرید، حجم آن‌را بر حسب a به‌دست آورید. اگر $a = ۴/۵cm$ حجم چهاروجهی چقدر می‌شود؟ (در این چهاروجهی ارتفاع از محل تقاطع نیمسازهای وجه مقابل می‌گذرد.)



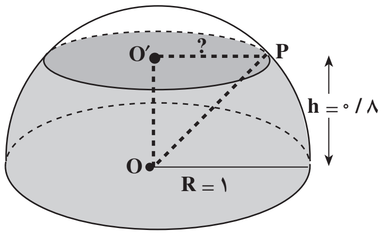
۴ــ۶ــ کُرِه

تجربه‌ی سال‌های کودکی شما که **توپ سرخ** و **سفید** و **آبی** را محکم به زمین می‌زدید تا به هوا رفتنش را با شادی تماشا کنید، فرصت خوبی برای آشنا شدن با کُره بود. توپ شما **میانش خالی بود** و چون سطح آن کاملاً گرد بود، روی زمین آرام و قرار نداشت و می‌غلتید و شما را به دنبال خودش می‌کشانید! اگر به اطراف خود نگاه کنید، جسم‌های کروی (کره‌ای شکل) زیادی را می‌بینید. توپ بسکتبال و توپ تنیس روی میز به شکل کره هستند و توپ فوتبال خیلی شبیه کره است.

کره مجموعه‌ی نقاطی از فضا است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام **مرکز** به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت **شعاع کره** نامیده می‌شود.

فعالیت ۴ـ۷

۱. یک کیک به شکل نیمکره را درنظر بگیرید که شعاع آن یک واحد باشد. کیک را از قسمت مسطّح آن روی یک سینی بگذارید (شکل ۳۵).



شکل ۳۵

اگر کیک را موازی با سینی و در ارتفاع‌های متفاوت بِبُرید، قطعه‌هایی با سطح مقطع‌های متفاوت به‌دست می‌آورید. برای مثال، سطح مقطع برشی از کیک را در ارتفاع $h = ۰/۸$ به‌دست می‌آوریم. برای این کار، با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، شعاع سطح مقطع را از مثلث قائم‌الزاویه‌ی $O'PO$ محاسبه می‌کنیم:

$$O'P^۲ = OP^۲ - OO'^۲$$

چون $OP =$ شعاع نیمکره $= ۱$ و $OO' = ۰/۸$

پس

$$O'P^۲ = ۱^۲ - (۰/۸)^۲$$
$$= ۱ - ۰/۶۴$$
$$= ۰/۳۶$$

و چون شعاع سطح مقطع همان $O'P$ است، پس مساحت سطح مقطع (A) برابر است با:

$$A = \pi \times O'P^۲$$
$$= ۳/۱۴ \times ۰/۳۶$$

درنتیجه:

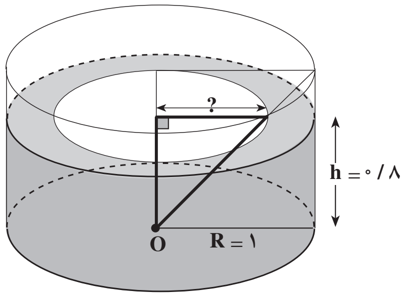
$$A = ۱/۱۳۰۴$$

الف) مساحت بُرِشی از کیک (سطح مقطع نیمکره) را در ارتفاع $h = ۰/۶$ به‌دست آورید.

ب) شعاع برشی از کیک را در ارتفاع $h = ۰/۴$ پیدا کنید.

پ) فرمولی برای پیدا کردن مساحت برشی از کیک (A) برحسب h به‌دست آورید.

۲ . اکنون کیکی به شکل استوانه که یک قسمت مخروطی شکل از داخل آن برداشته شده است درنظر بگیرید، به طوری که سطح قاعده و ارتفاع این کیک برابر سطح قاعده و ارتفاع کیک نیمکره‌ای شکل باشد.



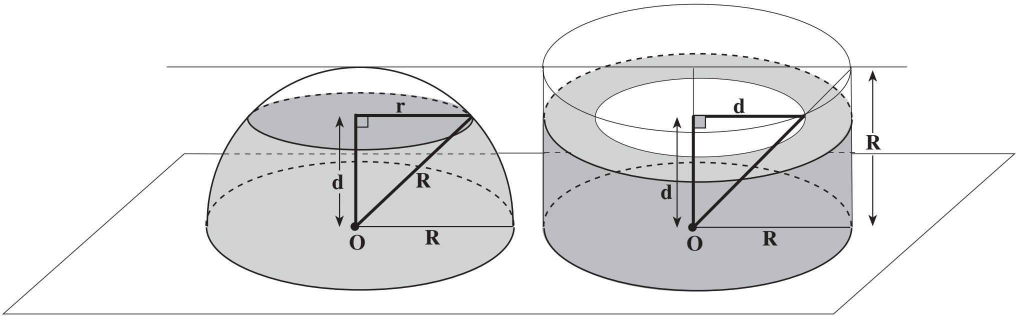
شکل ۳۶

۳ . قسمت‌های (الف) تا (پ) را برای کیک فوق انجام دهید.

۴ . با مقایسه‌ی مساحت برش‌های مختلف (سطح‌مقطع‌ها) در دو کیک، چه نظری در مورد حجم نیمکره دارید؟ اصل کاوالیری را به یاد بیاورید!

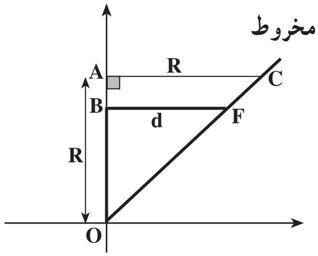
می‌خواهیم با استفاده از اصل کاوالیری، حجم نیمکره را با حجم استوانه‌ای که یک مخروط از آن خارج شده است مقایسه کنیم.

برای این کار، یک نیمکره با شعاع R و یک استوانه با شعاع R و ارتفاع R در نظر بگیرید که مخروطی با همان ارتفاع و همان شعاع از داخل آن برداشته شده است. این دو جسم فضایی را برروی یک صفحه قرار می‌دهیم و آن‌ها را در ارتفاع d، (d کوتاهتر از R است) به وسیله‌ی یک صفحه‌ی موازی با این صفحه قطع کرده، آنگاه سطح مقطع‌های آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.



شکل ۳۷

سطح مقطع قائم شکل ۳۷ را دوباره رسم می‌کنیم.



با توجه به این که شعاع قاعده و ارتفاع استوانه و مخروط برابر هستند، مثلث OAC متساوی‌الساقین است و چون زاویه‌ی A قائمه است، زاویه‌های C و O هر دو ۴۵° هستند. هم‌چنین در مثلث OBF نیز $\hat{O} = ۴۵^\circ$ و $\hat{B} = ۹۰^\circ$، درنتیجه $\hat{F} = ۴۵^\circ$. پس مثلث OBF متساوی‌الساقین است. یعنی،

$$BF = OB$$

از طرفی $OB = d$. بنابراین:

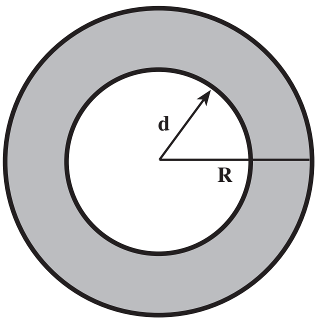
$$BF = d$$

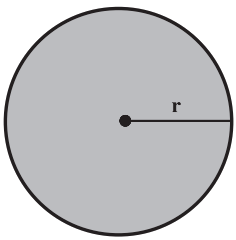
حال اگر سطح مقطع شکل ۳۷ را در نظر بگیرید، یک حلقه به‌دست می‌آید که شعاع دایره‌ی بزرگتر، R و شعاع دایره‌ی کوچکتر d است.

و

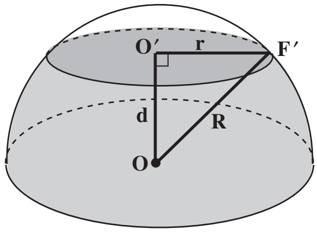
(۱) $\quad$ مساحت قسمت هاشورخورده $= \pi R^۲ - \pi d^۲$

همچنین سطح مقطع نیمکره یک قرص است.





برای پیدا کردن شعاع این قرص، به برش قائم آن نگاه می‌کنیم.



چون مثلث $OO'F'$ قائم‌الزاویه است (دلیل آن را توضیح دهید).

پس بنابر قضیه‌ی فیثاغورس

$$r^2 = R^2 - d^2$$

$$\text{مساحت قرص} = \pi r^2$$
$$= \pi(R^2 - d^2)$$
$$= \pi R^2 - \pi d^2 \qquad (2)$$

چون (۱) و (۲) یعنی مساحت سطح مقطع‌های شکل ۳۷ با هم برابرند درنتیجه طبق اصل کاوالیری، حجم‌های آن‌ها نیز با هم مساوی هستند یعنی حجم نیمکره با حجم استوانه‌ای که یک مخروط هم قاعده و هم ارتفاع از آن خارج شده باشد برابر است. پس

$$\text{حجم نیمکره} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم مخروط} \qquad (3)$$

چون شعاع استوانه R و ارتفاع آن نیز R است درنتیجه :

$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$
$$= \pi R^2 \times R$$
$$= \pi R^3 \qquad (4)$$

همچنین حجم مخروطی با شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع R برابر است با :

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\,\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$
$$= \frac{1}{3}\pi R^2 \times R$$
$$= \frac{1}{3}\pi R^3 \qquad (5)$$

از جایگزینی (۴) و (۵) در (۳)، حجم نیمکره به‌دست می‌آید :

$$\text{حجم نیمکره} = \pi R^{۳} - \frac{۱}{۳}\pi R^{۳}$$

$$\boxed{\text{حجم نیمکره} = \frac{۲}{۳}\pi R^{۳}}$$

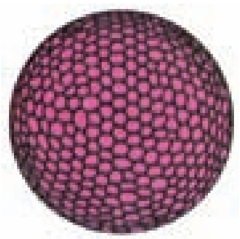
حجم کره دو برابر حجم نیمکره است، درنتیجه :

حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با :

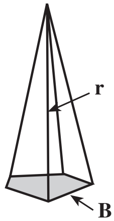
$$\text{حجم کره} = ۲\times\frac{۲}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

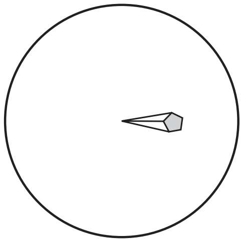
پیداکردن سطح جانبی کره با استفاده از حجم کره

حجم تقریبی کره را می‌توانیم به طریق دیگری به‌دست آوریم. برای این کار، کره را به تعداد زیادی شبه هرم تقسیم می‌کنیم، یعنی تصور کنید که سطح کره با تعداد بسیاری چندضلعی‌های خیلی کوچک پوشانده شده است. البته باید توجّه داشته باشیم که این چندضلعی‌ها واقعی نیستند زیرا روی کره هیچ پاره‌خط راستی نمی‌تواند قرار بگیرد. هرکدام از این شبه چندضلعی‌ها قسمت‌هایی از سطح کره هستند، پس مسطّح نمی‌باشند.



تصوّرکنید که نقاط روی ضلع‌های این شبه چندضلعی‌ها را به مرکز کره وصل کرده‌ایم به‌طوری که این شبه چندضلعی‌ها، قاعده‌های تعداد بسیاری شبه هرم با رأس مشترک یعنی مرکز کره باشند. در نتیجه، ارتفاع این شبه هرم‌ها برابر شعاع کره یعنی R است.





اگر قاعده‌ی یکی از شبه‌هرم‌ها را S درنظر بگیریم،حجم آن تقریباً مساوی $\frac{۱}{۳}R\times S$ می‌گردد. مجموع حجم این شبه‌هرم‌ها تقریب خوبی برای حجم کره می‌باشد. اگر سطح قاعده‌ی هر شبه‌هرم را به ترتیب $S_۱$، $S_۲$، . . . ، S_n بنامیم، پس

$$\text{حجم تقریبی کره} = \text{مجموع حجم شبه‌هرم‌ها} = \frac{۱}{۳}RS_۱+\frac{۱}{۳}RS_۲+\ldots+\frac{۱}{۳}RS_n$$

یا

$$\text{حجم تقریبی کره} = \frac{۱}{۳}R(S_۱+S_۲+\ldots+S_n)$$

از طرفی، مجموع مساحت‌های قاعده‌های شبه‌هرم‌ها برابر مساحت سطح کره است که آن‌را با S نمایش می‌دهیم. درنتیجه :

$$\boxed{\text{حجم تقریبی کره} = \frac{۱}{۳}RS}$$

باید توجّه داشته باشیم که هرچقدر تعداد شبه‌هرم‌ها بیشتر و بیشتر شود، حجم تقریبی کره به مقدار واقعی آن یعنی $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. بنابراین[۱]،

$$\frac{۱}{۳}RS=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

و از آنجا

$$S=۴\pi R^۲$$

یعنی

$$\boxed{\text{مساحت کره} = ۴\pi R^۲}$$

۱ــ تنها قسمت نادقیق این استدلال، مساوی قراردادن مقدار حجم تقریبی با حجم واقعی بود. برای دقیق‌نمودن این استدلال، نیاز به ابزاری داریم که بالاتر از سطح این درس است.

مسائل

۱. دو کره به ترتیب دارای شعاع‌های ۱ و ۲ سانتی‌متر هستند.

الف) مساحت هرکدام از آن‌ها را پیدا کنید.

ب) حجم هر یک را به‌دست آورید.

پ) اگر شعاع یک کره دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

ت) اگر شعاع یک کره دو برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۲. مشابه سه‌بعدی یک نیمدایره، نیمکره است. چون محیط یک دایره به شعاع r، برابر است با $۲\pi r$، طول یک نیمدایره $\frac{۱}{۲}(۲\pi r) = \pi r$ است. فرض کنید شعاع نیمکره r باشد. برای هرکدام از موارد زیر فرمولی به‌دست آورید:

الف) حجم نیمکره؛

ب) مساحت رویه‌ی نیمکره؛

پ) مساحت کل نیمکره، یعنی مجموع مساحت‌های رویه‌ی نیمکره و سطح دایره‌ای مسطّح آن.

۳. زمین تقریباً شکل یک کره است. شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر است.

الف) مساحت سطح زمین را حساب کنید.

ب) حجم زمین را حساب کنید.

۴. مساحت سطح یک کره ۳۶π سانتی‌متر مربع است.

الف) شعاع این کره را به‌دست آورید.

ب) حجم کره را محاسبه کنید.

منابع

1- Dieudonné, J. (1981). The **universal domination of geometry**. ZDM, 13 (1), P 5-7.

2- Discussion Document for an ICME Study. (1994). P**erspectives on the teaching of geometry for the 21 st century**. The International Commission on Mathematical Instruction.

3- Dukowski, L. & etal. (1988). **Mathematics 8**. Houghton Mifflin Canada Limited.

4- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. **Mathematics Teacher**. 74(1),11-26

5- Hoechsmann, K. (1991). **Lecture notes**. Mathematics Department, The University of British Columbia.Vancouver, Canada.

6- Jacobs, H. R. (1974). **Geometry** . W.H.Freeman & Company.

7- Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics, A Human Endeavor**. 2nd ed. W. H. Freeman & Company.

8- Kalin, R.& Corbitt, M.K. (1990). **Geometry: Teachers' Edition**. Prentice Hall, N J.

9- Kelly, B., Alexander, B.& Atkinson, P. (1987). **Mathematics 10**. Addison - Wesley Pub. Ltd.

10- Kerr, D.R, JR. (1981). A geometry from National Assessment. **Mathematics Teacher**. 74 (1), 27-32

11- Kline, M. (1974). **Why Johnny Can't add: The failure of the New Math**. New york: Vintage Books.

12- Lakatos, I. (1977). **Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery**. London: Cambridge University Press.

13- Lang, S., Murrow, G. (1988). **Geometry: A High School Course**, 2nd ed. Springer - Verlag.

14- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1970). **A History of Mathematics Education in the United States and Canada**. Thirty Second

year book. Author.

15- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1985). **Secondary School mathematics Curriculum: 1985 Yearbook**. Edited by C.R.Hisch. Reston, VA: Author

16- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1987). **Learning and teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook**. Edited by M.M. Lindquist. Reston, VA: Author

17- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**, Reston, VA: Author.

18- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). **Geometry from Multiple Perspectives**: Addenda Series, Grades 9-12: Author.

19- Robitaille, D. F.(1973). Why are we teaching high school Geometry? **Vector**. 14 (4), 13 - 22.

20- Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal of Research in Mathematics Education**. 20 (3), 309-321.

21- Steen, L. A.(ed.) (1990). **On the shoulders of Giants: New approach to numeracy**. National Academy Press, Washington D.C.

22- Stone, M. (1971). Learning and teaching axiomatic geometry. **Educational Studies in Mathematics**. 4, 91-103.

23- Welchons, A. M., Krichenberger, W. R., Pearson & H. R.(1976). **Plane Geometry** . Ginn & Company.

۲۴ــ مویز و دانز (۱۳۷۳). هندسه (مترجم : محمود دیّانی)، انتشارات فاطمی، تهران.

۲۵ ــ بختیاری، جواد. جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق.

فهرست